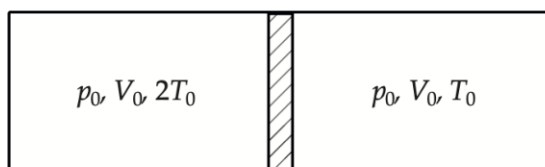


МОШ, 2024/25, заключительный этап, 11 класс

Условия и ответы

1 Установление равновесия

В теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально, лёгкий, хорошо проводящий тепло поршень делит объём на две равные части, каждая объёмом V_0 . В обеих частях находится один и тот же одноатомный идеальный газ при начальном давлении p_0 и температурах $2T_0$ и T_0 (см. рисунок). Теплоёмкостью поршня можно пренебречь.



Мощность теплообмена между частями цилиндра пропорциональна разности температур: $P = \alpha(T_1 - T_2)$, где α – коэффициент теплопередачи, T_1 – температура в левой части, T_2 – в правой. В процессе установления равновесия поршень медленно перемещается без трения о стенки цилиндра.

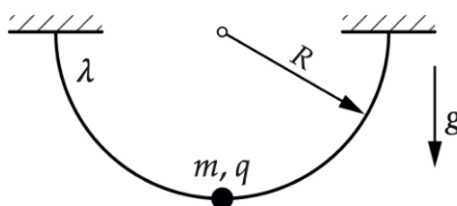
1. Найдите конечную температуру содержимого цилиндра.
2. Найдите время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 .
3. Найдите зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t)$.

Ответ

$$1) T = \frac{4}{3}T_0; \quad 2) \tau = \frac{5p_0V_0}{6\alpha T_0}; \quad 3) V_1(t) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0e^{-\lambda t}, \text{ где } \lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}.$$

2 Колебания бусинки

На гладком, равномерно заряженном полукольце радиусом R , закреплённом в вертикальной плоскости, в его нижней точке покоится одноимённо заряженная бусинка массой m и зарядом q . Линейная плотность заряда полукольца равна λ . Ускорение свободного падения равно g .



1. При каких значениях заряда q равновесие бусинки будет устойчивым? Параметры λ , g , R и m считаются известными.
2. Пусть заряд бусинки q таков, что положение её равновесия в нижней точке полукольца является устойчивым. Определите период малых колебаний бусинки вблизи положения равновесия. Параметры λ , q , g , R и m известны.

Ответ

$$1) q \leq \frac{\sqrt{2} mgR}{k\lambda}; \quad 2) T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{2} mR^2}{\sqrt{2} mgR - kq\lambda}}.$$

3 Поле в центре

В этой задаче рассматриваются плоские конструкции, изготовленные из однородной проволоки постоянного сечения, единица длины которой имеет сопротивление ρ . Требуется определить индукцию магнитного поля, порождаемую токами, текущими по проволоке.

1. Проволочной конструкцией, рассматриваемой в этом пункте, является кольцо радиусом r . В точках 1, 2 и 3, находящихся на равных расстояниях друг от друга (см. рис. 1), к кольцу подключены источники ЭДС, так что если положить потенциал точки 3 равным нулю, то потенциалы точек 1 и 2 окажутся равными φ_1 и φ_2 соответственно. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого участком 1-2 в центре кольца.

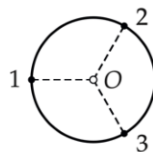


Рис. 1

2. В этом пункте рассматривается плоская конструкция, изображённая на рис. 2. Она состоит из двух concentric rings, двух радиальных перемычек и двух длинных, прямолинейных проводников. Точками чёрного цвета обозначены точки спаивания. В точке A контакта между проволоками нет. Радиусы concentric wire loops are r and $2r$, angles between straight wire sections are α , as shown in the diagram. Determine the induction of the magnetic field in the common center of the rings, at point O.

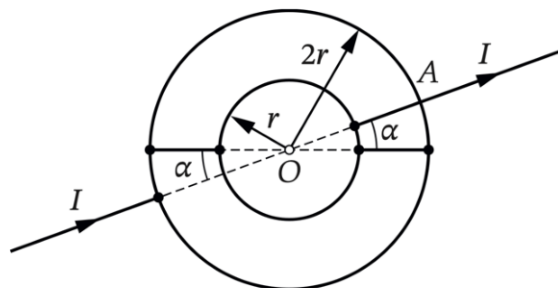


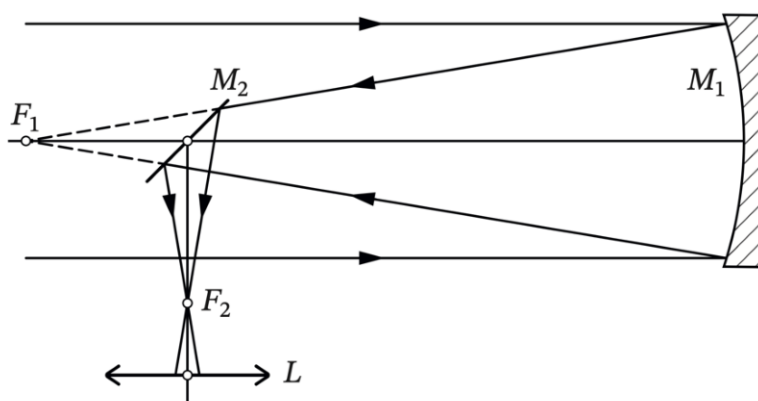
Рис. 2

Ответ

- 1) $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho r^2}$ (вдоль оси z , перпендикулярной плоскости рисунка и направленной на нас); 2) $B = 0$.

4 Телескоп-рефлектор Ньютона

Рефлектор Ньютона – это зеркальный аналог зрительной трубы Кеплера. Вогнутое сферическое зеркало M_1 (см. рисунок, расположенный ниже по тексту), представляющее собой объектив телескопа-рефлектора, формирует в фокальной плоскости действительное изображение небесного светила. Это изображение рассматривается через окуляр L , роль которого играет собирающая линза. На рисунке также можно видеть плоское поворотное зеркало M_2 .



Зеркало отклоняет сходящийся отражённый (от вогнутого зеркала) пучок света в сторону. На рисунке схематично показан ход лучей.

1. Пусть радиус сферического зеркала равен R , а фокусное расстояние линзы равно F . Чему равно угловое увеличение прибора?

Указание. Угловым увеличением γ оптических приборов, предназначенных для наблюдения удалённых объектов, называется отношение $\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}$, где α' – угол, под которым рассматриваемый объект виден в окуляр, α – угол зрения невооружённым глазом с того же расстояния.

2. Один из крупнейших в мире телескоп Специальной астрофизической обсерватории РАН (сделанный по схеме Ньютона) имеет фокусное расстояние объектива $F = 300$ м. Каков максимально допустимый угол $\varphi_{\max}$ качания телескопа, обусловленный вибрациями фундамента обсерватории, при котором ещё полностью используется разрешающая способность фотоплёнки $\delta = 50$ линий/мм при фотографировании астрономических объектов? При фотографировании плёнка помещается в фокальную плоскость объектива, используется длительная выдержка до нескольких минут.
3. Пусть из-за проходящих рядом с обсерваторией строительных работ телескоп колеблется с амплитудой 10^{-6} рад. Чему будет равен размер изображения на плёнке, если угловой размер источника 10^{-7} рад?

Ответ

- 1) $\gamma = \frac{R}{2F}$; 2) $\varphi_{\max} = \frac{1}{F\delta} \approx 6,7 \cdot 10^{-8}$ рад; 3) $\Delta = 0,63$ мм.

5 Пизанская башня

Согнутую в виде спирали металлическую полосу можно использовать в качестве пружины кручения, то есть пружины, препятствующей повороту механизмов (см. рис. 3). При попытке распрямить или скрутить такую пружину она развивает возвращающий момент сил M , пропорциональный углу поворота α : $M = \gamma\alpha$, где γ – постоянный коэффициент жёсткости кручения пружины. Нижний конец лёгкого жёсткого вертикального стержня длиной l жёстко скреплён со свободным концом пружины кручения. Внутренний конец пружины закреплён. К верхнему концу стержня прикладывается сила F , направленная вертикально вниз.

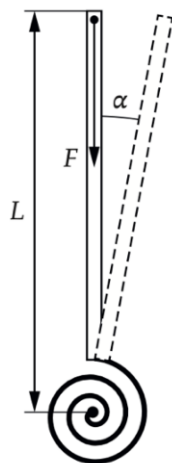


Рис. 3

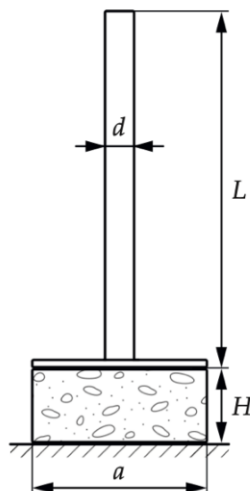


Рис. 4

1. При какой максимальной силе $F_{\max}$ вертикальное положение равновесия стержня ещё будет оставаться устойчивым?
2. Каким будет угол отклонения, если сила воздействия будет равна $F = 1,01F_{\max}$?

Пизанская башня – один из известнейших памятников архитектуры. Башня отличается тем, что её ось отклонена на некоторый угол от вертикали из-за мягкости грунта под её основанием. Рассмотрим модель башни, стоящей на грунте. Башня представляет собой однородный цилиндр, высотой L и диаметром d (рис. 4), масса единицы длины башни равна λ . Башня поставлена по центру на жёсткое невесомое квадратное основание со стороной a , к которому снизу приклеена поролоновая подушка того же сечения. Высота подушки, после установки на неё башни составляет H . Вся конструкция установлена на жёстком столе. Масса распределена по башне однородно. Модуль Юнга поролона равен E . Коэффициент трения между башней и основанием можно считать достаточно большим, так что башня не проскальзывает относительно основания.

3. При какой минимальной высоте башни L_1 она займёт устойчивое наклонное положение?
4. При какой минимальной высоте башни L_2 она опрокинется? Выразите ответ через L_1 и d , считая $d \ll L_1$.

Указание 1. При малой относительной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ растяжения/сжатия стержня с площадью поперечного сечения S сила упругости, возникающая в нём, может быть рассчитана по формуле $F = E\varepsilon S$, где E – модуль Юнга материала стержня.

Указание 2. При ответе на вопросы разных пунктов задачи могут оказаться очень полезными приближённые формулы, справедливые для малых значений α ($\alpha \ll 1$): $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, $\tan \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$.

Ответ

$$1) F_{\max} = \frac{\gamma}{l}; \quad 2) \alpha \approx 0,24 \text{ рад} \approx 14^\circ; \quad 3) L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda gH}}; \quad 4) L_2 = L_1 \sqrt{1 + \frac{d^2}{2L_1^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{d^2}{4L_1^2}\right).$$