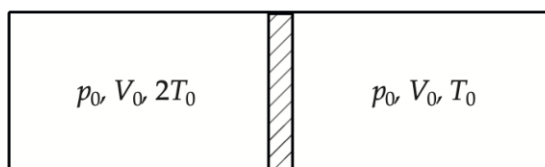


МОШ, 2024/25, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Установление равновесия

В теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально, лёгкий, хорошо проводящий тепло поршень делит объём на две равные части, каждая объёмом V_0 . В обеих частях находится один и тот же одноатомный идеальный газ при начальном давлении p_0 и температурах $2T_0$ и T_0 (см. рисунок). Теплоёмкостью поршня можно пренебречь.



Мощность теплообмена между частями цилиндра пропорциональна разности температур: $P = \alpha(T_1 - T_2)$, где α – коэффициент теплопередачи, T_1 – температура в левой части, T_2 – в правой. В процессе установления равновесия поршень медленно перемещается без трения о стенки цилиндра.

1. Найдите конечную температуру содержимого цилиндра.
2. Найдите время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 .
3. Найдите зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t)$.

Подсказка

Оба давления на поршень всё время равны. Подумайте, что тогда даёт первое начало термодинамики для всей системы и каким получается процесс в каждой части.

Ответ

$$1) T = \frac{4}{3}T_0; \quad 2) \tau = \frac{5p_0V_0}{6\alpha T_0}; \quad 3) V_1(t) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0e^{-\lambda t}, \text{ где } \lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}.$$

Решение

а) Запишем уравнения состояния для начального момента времени:

$$p_0V_0 = \nu_1 R \cdot 2T_0, \quad p_0V_0 = \nu_2 R \cdot T_0.$$

Отсюда получаем, что $\nu_2 = 2\nu_1$.

Пусть в некоторый момент времени t температура в левой части цилиндра равна T_1 , а в правой – T_2 . Согласно первому началу термодинамики

$$\frac{3}{2}\nu_1 R(2T_0 - T_1) = \frac{3}{2}\nu_2 R(T_2 - T_0), \quad (1)$$

где T_1 и T_2 – температуры в левой и правой частях цилиндра в момент времени t соответственно.

В конце процесса теплообмена температуры в левой и правой частях уравниваются. Тогда $2T_0 - T = 2T - 2T_0$. Откуда получаем ответ на пункт а): $T = \frac{4}{3}T_0$.

б) По условию задачи тепло передаётся медленно, значит, давления на поршень с двух сторон практически равны, то есть в любой момент времени $p_1 = p_2$. Перепишем уравнение (1), воспользовавшись уравнением состояния:

$$p_0 V_0 - p_1 V_1 = p_2 V_2 - p_0 V_0 \implies p_1 = p_2 = p_0.$$

То есть процесс теплопередачи происходит изобарически, и молярная теплоёмкость равна $c_p = \frac{5}{2}R$.

Пусть за малое время dt температуры частей цилиндра изменились на величины dT_1 и dT_2 . Тогда

$$\frac{5}{2}\nu_1 R dT_1 = \alpha(T_2 - T_1) dt, \quad \frac{5}{2}\nu_2 R dT_2 = \alpha(T_1 - T_2) dt \implies \frac{dT_1}{dt} = \frac{2\alpha(T_2 - T_1)}{5\nu_1 R}, \quad \frac{dT_2}{dt} = \frac{2\alpha(T_1 - T_2)}{5\nu_2 R}.$$

Введём обозначение $\Delta T = T_1 - T_2$. Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{2\alpha}{5R} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right) \Delta T = -\frac{6\alpha T_0}{5p_0 V_0} \Delta T.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем: $\Delta T = T_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0 V_0}$. Значит, время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 , равно $\tau = \frac{5p_0 V_0}{6\alpha T_0}$.

в) Из уравнения $T_1 - T_2 = T_0 e^{-\lambda t}$ и уравнения (1) следует:

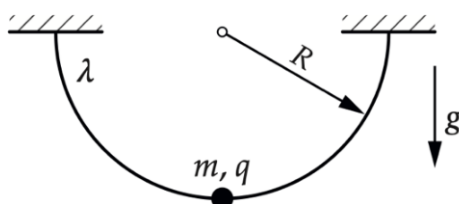
$$T_1(t) = \frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t}, \quad T_2(t) = \frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}T_0 e^{-\lambda t}.$$

Так как процесс изобарический, следовательно, $\frac{V_1(t)}{T_1(t)} = \frac{\nu_1 R}{p_0}$. Откуда получаем окончательный ответ:

$$V_1(t) = \frac{\nu_1 R}{p_0} \left(\frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t} \right) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}.$$

2 Колебания бусинки

На гладком, равномерно заряженном полукольце радиусом R , закреплённом в вертикальной плоскости, в его нижней точке покоится одноимённо заряженная бусинка массой m и зарядом q . Линейная плотность заряда полукольца равна λ . Ускорение свободного падения равно g .



1. При каких значениях заряда q равновесие бусинки будет устойчивым? Параметры λ , g , R и m считаются известными.
2. Пусть заряд бусинки q таков, что положение её равновесия в нижней точке полукольца является устойчивым. Определите период малых колебаний бусинки вблизи положения равновесия. Параметры λ , q , g , R и m известны.

Подсказка

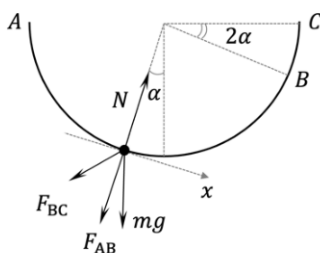
При смещении бусинки на малый угол α почти вся сила отталкивания от полукольца направлена по нормали; в касательном направлении остаётся сила только от маленького участка дуги, оказавшегося с «другой» стороны.

Ответ

$$1) q \leq \frac{\sqrt{2} mgR}{k\lambda}; \quad 2) T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{2} mR^2}{\sqrt{2} mgR - kq\lambda}}.$$

Решение

а) Сместим бусинку из положения равновесия на малый угол α от вертикали.



Из симметрии следует, что участок AB полукольца действует на бусинку по нормали с силой F_{AB} , как показано на рисунке. Напишем условие существования возвращающей силы в касательном к полукольцу направлении (ось Ox):

$$mg \sin \alpha - F_{BC} \cos \frac{\pi}{4} \geq 0.$$

Так как $F_{BC} = k \frac{q\lambda R \cdot 2\alpha}{2R^2}$ (направлена под углом $\frac{3\pi}{4}$ к оси Ox), и справедлива приближённая формула $\sin \alpha \approx \alpha$, получаем

$$k \frac{q\lambda R \cdot 2\alpha}{2R^2} \leq \frac{mg\alpha}{\cos \frac{\pi}{4}} \Rightarrow q \leq \frac{\sqrt{2} mgR}{k\lambda}.$$

б) Запишем второй закон Ньютона для бусинки (см. рисунок):

$$-m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{BC} \cos \frac{\pi}{4} \approx mg \frac{x}{R} - k \frac{q\lambda \cdot x}{R^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, период малых колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{2} mR^2}{\sqrt{2} mgR - kq\lambda}}.$$

3 Поле в центре

В этой задаче рассматриваются плоские конструкции, изготовленные из однородной проволоки постоянного сечения, единица длины которой имеет сопротивление ρ . Требуется определить индукцию магнитного поля, порождаемую токами, текущими по проволоке.

1. Проволочной конструкцией, рассматриваемой в этом пункте, является кольцо радиусом r . В точках 1, 2 и 3, находящихся на равных расстояниях друг от друга (см. рис. 1), к кольцу подключены источники ЭДС, так что если положить потенциал точки 3 равным нулю, то потенциалы точек 1 и 2 окажутся равными φ_1 и φ_2 соответственно. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого участком 1-2 в центре кольца.

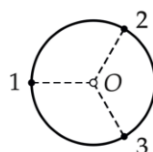


Рис. 1

2. В этом пункте рассматривается плоская конструкция, изображённая на рис. 2. Она состоит из двух concentric rings, двух radial segments and two long, straight wire segments. Points of contact are marked with black dots. At point A, there is no contact between the wires. The radii of the concentric wire loops are r and $2r$, the angles between the straight wire segments are α , as shown in the diagram. Determine the induction of the magnetic field in the common center of the rings, at point O.

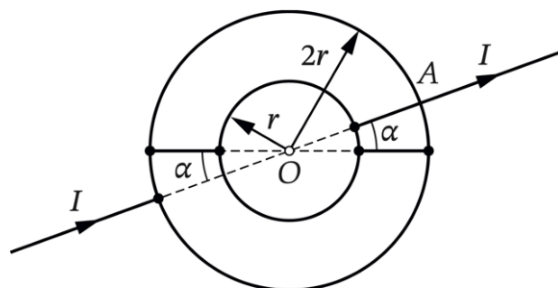


Рис. 2

Подсказка

Выразите ток через участок кольца через разность потенциалов на его концах, а затем сложите вклады всех участков кольца по закону Био–Савара–Лапласа: в центре они пропорциональны именно разностям потенциалов.

Ответ

- 1) $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho r^2}$ (вдоль оси z , перпендикулярной плоскости рисунка и направленной на нас); 2) $B = 0$.

Решение

а) Выберем ось z , перпендикулярную плоскости рисунка и направленную на нас. Из закона Био–Савара–Лапласа следует, что вектор индукции поля, создаваемого участком 1-2, перпендикулярен плоскости рисунка. Его проекция на ось z равна:

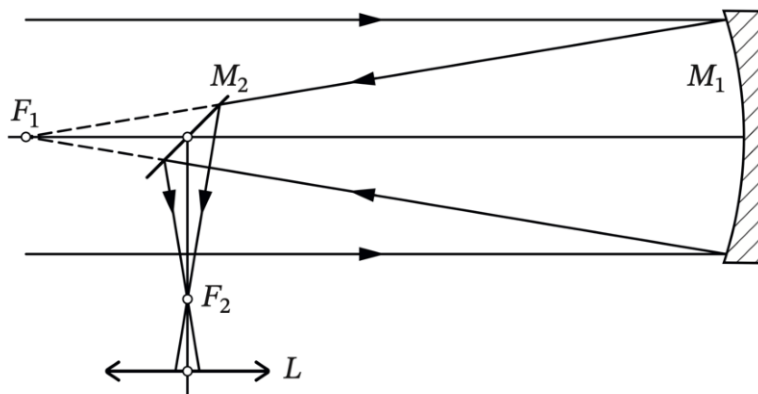
$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_{21}L}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_{21}\rho L}{\rho r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho r^2},$$

где I_{21} – алгебраическое значение тока, протекающего через участок 1-2 (положителен, когда ток течёт от точки 2 к точке 1, и отрицателен, когда наоборот), L – длина участка 1-2.

б) Радиальные перемычки и прямолинейные провода в точке O магнитного поля не создают, так как лежат на прямых, проходящих через точку O . Кольцо (как малое, так и большое) тоже не создают поля в точке O , поскольку сумма $\sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\rho r^2}$ равна нулю при обходе по замкнутому контуру, который не содержит батареек. Таким образом, индукция магнитного поля в точке O равна нулю.

4 Телескоп-рефлектор Ньютона

Рефлектор Ньютона – это зеркальный аналог зрительной трубы Кеплера. Вогнутое сферическое зеркало M_1 (см. рисунок, расположенный ниже по тексту), представляющее собой объектив телескопа-рефлектора, формирует в фокальной плоскости действительное изображение небесного светила. Это изображение рассматривается через окуляр L , роль которого играет собирающая линза. На рисунке также можно видеть плоское поворотное зеркало M_2 .



Зеркало отклоняет сходящийся отражённый (от вогнутого зеркала) пучок света в сторону. На рисунке схематично показан ход лучей.

1. Пусть радиус сферического зеркала равен R , а фокусное расстояние линзы равно F . Чему равно угловое увеличение прибора?

Указание. Угловым увеличением γ оптических приборов, предназначенных для наблюдения удалённых объектов, называется отношение $\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}$, где α' – угол, под которым рассматриваемый объект виден в окуляре, α – угол зрения невооружённым глазом с того же расстояния.

2. Один из крупнейших в мире телескоп Специальной астрофизической обсерватории РАН (сделанный по схеме Ньютона) имеет фокусное расстояние объектива $F = 300$ м. Каков максимально допустимый угол $\varphi_{\max}$ качания телескопа, обусловленный вибрациями

фундамента обсерватории, при котором ещё полностью используется разрешающая способность фотоплёнки $\delta = 50$ линий/мм при фотографировании астрономических объектов? При фотографировании плёнка помещается в фокальную плоскость объектива, используется длительная выдержка до нескольких минут.

3. Пусть из-за проходящих рядом с обсерваторией строительных работ телескоп колеблется с амплитудой 10^{-6} рад. Чему будет равен размер изображения на плёнке, если угловой размер источника 10^{-7} рад?

Подсказка

В телескопной настройке фокальные плоскости объектива и окуляра совпадают; сравните углы, под которыми изображение размера H видно из этих двух фокусов. При качании зеркала на угол φ изображение сдвигается на $2F\varphi$, но плёнка тоже сдвигается.

Ответ

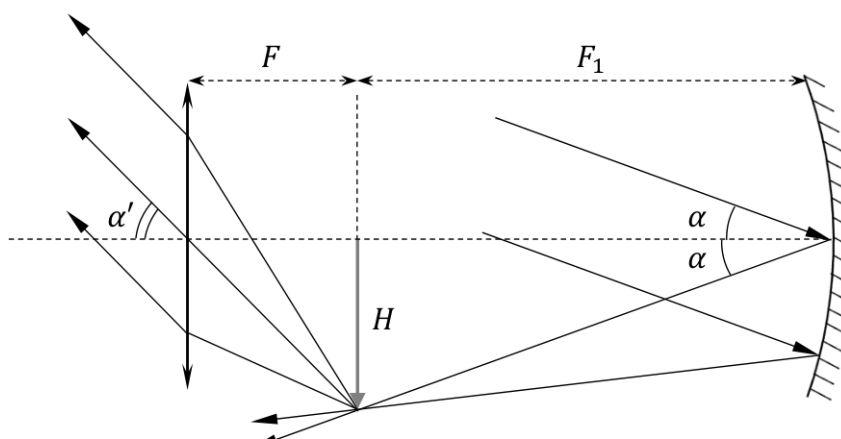
$$1) \gamma = \frac{R}{2F}; \quad 2) \varphi_{\max} = \frac{1}{F\delta} \approx 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ рад}; \quad 3) \Delta = 0,63 \text{ мм}.$$

Решение

а) При наблюдении удалённого предмета объектив формирует его действительное изображение в своей фокальной плоскости. Это изображение рассматривается в окуляр, как в лупу. Если фокальные плоскости объектива и окуляра совпадают, то параллельный входящий пучок переходит в параллельный выходящий, но идущий, вообще говоря, под другим углом к главной оптической оси системы. В этом случае наблюдение ведётся ненапряжённым глазом и угловое увеличение телескопа легко находится из рисунка

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{H/F}{H/F_1} = \frac{F_1}{F} = \frac{R}{2F},$$

где H – размер изображения в совмещённых фокальных плоскостях объектива и окуляра, $F_1 = \frac{R}{2}$ – фокусное расстояние объектива.



б) При повороте зеркала из-за тряски фундамента на угол φ его главная оптическая ось поворачивается тоже на угол φ , а изображение точки астрономического объекта, находящееся в фокальной плоскости, сместится, как нетрудно понять, на $2F\varphi$ (на φ возрастёт угол падения и на столько же – угол отражения). Но та же тряска фундамента вызовет смещение самой плёнки на $F\varphi$ (ибо «всё» вместе с фундаментом повернётся на угол φ), так что относительно плёнки

изображение сместится только на $F\varphi$. Очевидно, что эта величина не должна быть больше $1/\delta$, откуда

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{F\delta} \approx 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ рад.}$$

в) Обозначим угловой размер источника $\alpha = 10^{-7}$. В идеальных условиях размер его изображения на плёнке будет равен $\Delta_0 = \alpha F$, так что на плёнке получится круг указанного диаметра. Однако вследствие вибраций обсерватории центр изображения Плутона при съёмке будет хаотически смещаться с амплитудой $d = \varphi F$. Размах колебаний центра (расстояние между крайними положениями) будет вдвое больше амплитуды, а полный размер изображения, полученного с длительной выдержкой, составит $\Delta = \Delta_0 + 2d = F(\alpha + 2\varphi) = 0,63 \text{ мм.}$

5 Пизанская башня

Согнутую в виде спирали металлическую полосу можно использовать в качестве пружины кручения, то есть пружины, препятствующей повороту механизмов (см. рис. 3). При попытке распрямить или скрутить такую пружину она развивает возвращающий момент сил M , пропорциональный углу поворота α : $M = \gamma\alpha$, где γ – постоянный коэффициент жёсткости кручения пружины. Нижний конец лёгкого жёсткого вертикального стержня длиной l жёстко скреплён со свободным концом пружины кручения. Внутренний конец пружины закреплён. К верхнему концу стержня прикладывается сила F , направленная вертикально вниз.

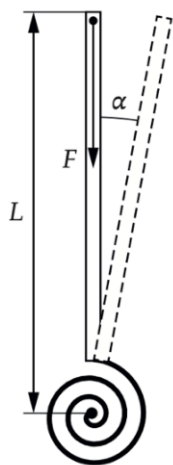


Рис. 3

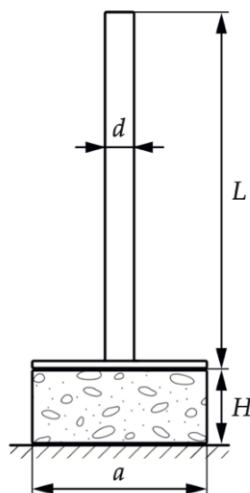


Рис. 4

1. При какой максимальной силе $F_{\max}$ вертикальное положение равновесия стержня ещё будет оставаться устойчивым?
2. Каким будет угол отклонения, если сила воздействия будет равна $F = 1,01F_{\max}$?

Пизанская башня – один из известнейших памятников архитектуры. Башня отличается тем, что её ось отклонена на некоторый угол от вертикали из-за мягкости грунта под её основанием. Рассмотрим модель башни, стоящей на грунте. Башня представляет собой однородный цилиндр, высотой L и диаметром d (рис. 4), масса единицы длины башни равна λ . Башня поставлена по центру на жёсткое невесомое квадратное основание со стороной a , к которому снизу приклеена поролоновая подушка того же сечения. Высота подушки, после установки на неё башни составляет H . Вся конструкция установлена на жёстком столе. Масса распределена по башне однородно. Модуль Юнга поролона равен E . Коэффициент трения между башней и основанием можно считать достаточно большим, так что башня не проскальзывает относительно основания.

3. При какой минимальной высоте башни L_1 она займёт устойчивое наклонное положение?
4. При какой минимальной высоте башни L_2 она опрокинется? Выразите ответ через L_1 и d , считая $d \ll L_1$.

Указание 1. При малой относительной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ растяжения/сжатия стержня с площадью поперечного сечения S сила упругости, возникающая в нём, может быть рассчитана по формуле $F = E\varepsilon S$, где E – модуль Юнга материала стержня.

Указание 2. При ответе на вопросы разных пунктов задачи могут оказаться очень полезными приближённые формулы, справедливые для малых значений α ($\alpha \ll 1$): $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$.

Подсказка

Вертикальное положение теряет устойчивость, когда наклон начальных участков графиков момента силы и упругого момента совпадает. Для башни роль пружины играет поролон: найдите его возвращающий момент интегрированием по основанию.

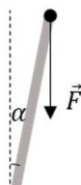
Ответ

$$1) F_{\max} = \frac{\gamma}{l}; \quad 2) \alpha \approx 0,24 \text{ рад} \approx 14^\circ; \quad 3) L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda gH}}; \quad 4) L_2 = L_1 \sqrt{1 + \frac{d^2}{2L_1^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{d^2}{4L_1^2}\right).$$

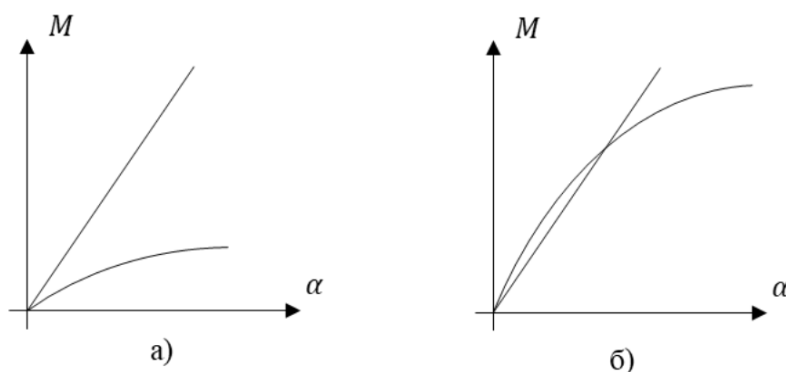
Решение

а) Пусть рычаг отклонился от вертикали и находится в состоянии равновесия (см. рисунок). Тогда сумма моментов сил, действующих на рычаг, будет равна нулю:

$$Fl \sin \alpha = \gamma \alpha.$$



Посмотрим на графическое решение этого уравнения. Нарисуем графики зависимости момента сил, скручивающего пружину, и момента сил упругости от угла α . Возможно две ситуации, изображённые на рисунках а) и б).



Видно, что в случае малой приложенной силы график синуса лежит ниже прямой и уравнение имеет только одно решение, соответствующее вертикальному положению рычага. При

превышении некоторого предела решений уравнения становится два. При этом вертикальное положение оказывается неустойчивым. Действительно, при малом отклонении от положения равновесия возвращающий момент сил оказывается меньше момента сил, увеличивающего отклонение. Таким образом, при преодолении критической силы положение равновесия окажется наклонённым. Критическую силу легко рассчитать, рассмотрев переходную от рисунка а) к рисунку б) ситуацию. В ней угловой коэффициент обоих графиков в нулевом положении должен совпадать, то есть:

$$F_{\max} l = \gamma \Rightarrow F_{\max} = \frac{\gamma}{l}.$$

б) Для нахождения нового положения равновесия можем воспользоваться формулой приближённого исчисления синуса угла:

$$Fl \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) = \gamma \alpha.$$

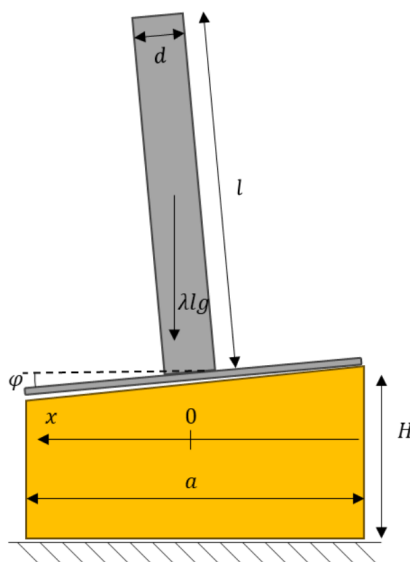
Сократим выражение на α , так как нулевой корень уравнения нас не интересует, и решим квадратное уравнение:

$$Fl \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right) = \gamma.$$

Два корня уравнения соответствуют двум возможным положениям отклонения рычага:

$$\alpha = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{\gamma}{Fl} \right)} = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{1}{1,01} \right)} = 0,24 \approx 14^\circ.$$

в) Рассмотрим теперь модель Пизанской башни, установленной на упругой опоре. Пусть основание башни наклонилось на угол φ (рисунок). Тогда за счёт сил упругости возникнет возвращающий момент сил. Рассчитаем его.



На расстоянии x от осевой линии поролон сожмётся на $x \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Тогда в сечении поролона площадью $ds = a dx$ возникнет сила в соответствии с законом Гука:

$$dF = E ds \varepsilon = Ea \frac{x \cdot \operatorname{tg} \varphi}{H} dx.$$

Эта сила внесёт вклад в суммарный возвращающий момент сил:

$$dM = x dF = Ea \frac{x^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{H} dx.$$

Тогда суммарный момент сил может быть рассчитан как:

$$M = 2 \int_0^{a/2} \frac{Ea \operatorname{tg} \varphi \cdot x^2}{H} dx = \frac{Ea^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{12H}.$$

То есть для малых углов крутильная жёсткость подставки составит $\gamma' = \frac{Ea^4}{12H}$.

На наклонённую башню действует момент силы тяжести, равный:

$$M = \frac{\lambda L^2}{2} g \sin \varphi.$$

Аналогично пункту а) башня выйдет из вертикального положения в случае равенства коэффициента пропорциональности между синусом и моментом силы и крутильной жёсткости опоры:

$$\frac{Ea^4}{12H} = \frac{\lambda L_1^2}{2} g \Rightarrow L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda g H}}.$$

г) Рассмотрим наклонное равновесие башни:

$$\frac{Ea^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{12H} = \lambda \frac{L^2}{2} g \sin \varphi.$$

С учётом приближённых формул:

$$\left(1 + \frac{\varphi^2}{3}\right) = \frac{L^2}{L_1^2} \left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right).$$

Предельный угол отклонения башни, прежде чем она опрокинется, определяется её высотой и диаметром: $\varphi_{\text{кр}} = \frac{d}{L}$. Тогда для расчёта критической высоты башни запишем:

$$\left(1 + \frac{d^2}{3L_2^2}\right) = \frac{L_2^2}{L_1^2} \left(1 - \frac{d^2}{6L_2^2}\right).$$

Преобразуем уравнение к виду биквадратного:

$$\frac{L_2^4}{L_1^2} - L_2^2 \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2}\right) - \frac{d^2}{3} = 0.$$

Рассчитаем дискриминант:

$$D = \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2}\right)^2 + \frac{4d^2}{3L_1^2}.$$

С учётом указанного в условии приближения:

$$D = 1 + \frac{5d^2}{3L_1^2}.$$

Тогда выберем положительный корень уравнения:

$$L_2^2 = \frac{L_1^2}{2} \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2} + \sqrt{1 + \frac{5d^2}{3L_1^2}}\right) \approx \frac{L_1^2}{2} \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2} + 1 + \frac{5d^2}{6L_1^2}\right) = L_1^2 \left(1 + \frac{d^2}{2L_1^2}\right).$$

И окончательно для высоты L_2 с учётом приближений:

$$L_2 = L_1 \sqrt{1 + \frac{d^2}{2L_1^2}} \approx L_1 \left(1 + \frac{d^2}{4L_1^2}\right).$$

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2024/25, заключительный этап, 11 класс — условия, решения. Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.