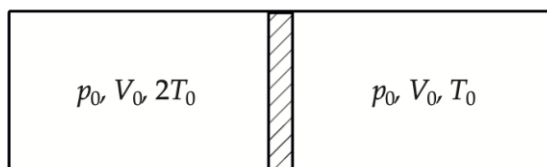


МОШ, 2024/25, заключительный этап, 11 класс

Условия

1 Установление равновесия

В теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально, лёгкий, хорошо проводящий тепло поршень делит объём на две равные части, каждая объёмом V_0 . В обеих частях находится один и тот же одноатомный идеальный газ при начальном давлении p_0 и температурах $2T_0$ и T_0 (см. рисунок). Теплоёмкостью поршня можно пренебречь.

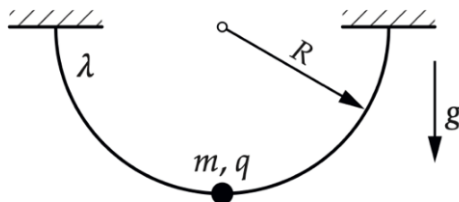


Мощность теплообмена между частями цилиндра пропорциональна разности температур: $P = \alpha(T_1 - T_2)$, где α – коэффициент теплопередачи, T_1 – температура в левой части, T_2 – в правой. В процессе установления равновесия поршень медленно перемещается без трения о стенки цилиндра.

1. Найдите конечную температуру содержимого цилиндра.
2. Найдите время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 .
3. Найдите зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t)$.

2 Колебания бусинки

На гладком, равномерно заряженном полукольце радиусом R , закреплённом в вертикальной плоскости, в его нижней точке покоится одноимённо заряженная бусинка массой m и зарядом q . Линейная плотность заряда полукольца равна λ . Ускорение свободного падения равно g .



1. При каких значениях заряда q равновесие бусинки будет устойчивым? Параметры λ , g , R и m считаются известными.
2. Пусть заряд бусинки q таков, что положение её равновесия в нижней точке полукольца является устойчивым. Определите период малых колебаний бусинки вблизи положения равновесия. Параметры λ , q , g , R и m известны.

3 Поле в центре

В этой задаче рассматриваются плоские конструкции, изготовленные из однородной проволоки постоянного сечения, единица длины которой имеет сопротивление ρ . Требуется определить индукцию магнитного поля, порождаемую токами, текущими по проволоке.

1. Проволочной конструкцией, рассматриваемой в этом пункте, является кольцо радиусом r . В точках 1, 2 и 3, находящихся на равных расстояниях друг от друга (см. рис. 1), к кольцу подключены источники ЭДС, так что если положить потенциал точки 3 равным нулю, то потенциалы точек 1 и 2 окажутся равными φ_1 и φ_2 соответственно. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого участком 1-2 в центре кольца.

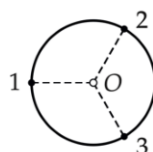


Рис. 1

2. В этом пункте рассматривается плоская конструкция, изображённая на рис. 2. Она состоит из двух концентрических колец, двух радиальных перемычек и двух длинных, прямолинейных проводников. Точками чёрного цвета обозначены точки спаивания. В точке A контакта между проволоками нет. Радиусы концентрических проволочных колец равны r и $2r$, углы между прямолинейными проволочными участками равны α , как показано на рисунке. Определите индукцию магнитного поля в общем центре колец, в точке O .

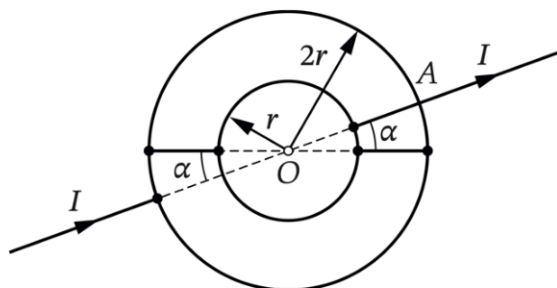
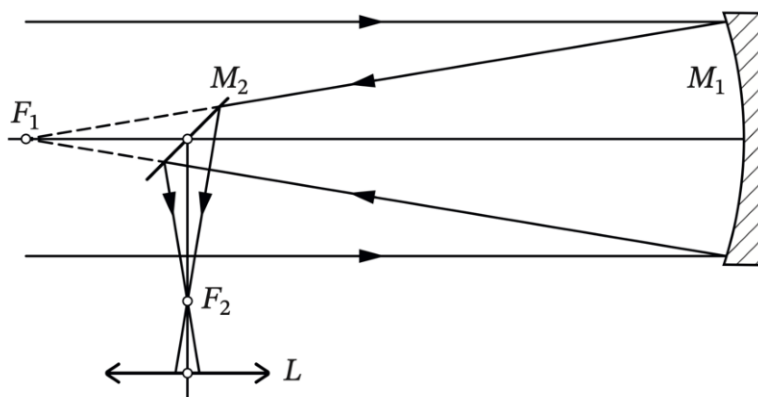


Рис. 2

4 Телескоп-рефлектор Ньютона

Рефлектор Ньютона – это зеркальный аналог зрительной трубы Кеплера. Вогнутое сферическое зеркало M_1 (см. рисунок, расположенный ниже по тексту), представляющее собой объектив телескопа-рефлектора, формирует в фокальной плоскости действительное изображение небесного светила. Это изображение рассматривается через окуляр L , роль которого играет собирающая линза. На рисунке также можно видеть плоское поворотное зеркало M_2 .



Зеркало отклоняет сходящийся отражённый (от вогнутого зеркала) пучок света в сторону. На рисунке схематично показан ход лучей.

1. Пусть радиус сферического зеркала равен R , а фокусное расстояние линзы равно F . Чему равно угловое увеличение прибора?

Указание. Угловым увеличением γ оптических приборов, предназначенных для наблюдения удалённых объектов, называется отношение $\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}$, где α' – угол, под которым рассматриваемый объект виден в окуляр, α – угол зрения невооружённым глазом с того же расстояния.

2. Один из крупнейших в мире телескоп Специальной астрофизической обсерватории РАН (сделанный по схеме Ньютона) имеет фокусное расстояние объектива $F = 300$ м. Каков максимально допустимый угол $\varphi_{\max}$ качания телескопа, обусловленный вибрациями фундамента обсерватории, при котором ещё полностью используется разрешающая способность фотоплёнки $\delta = 50$ линий/мм при фотографировании астрономических объектов? При фотографировании плёнка помещается в фокальную плоскость объектива, используется длительная выдержка до нескольких минут.
3. Пусть из-за проходящих рядом с обсерваторией строительных работ телескоп колеблется с амплитудой 10^{-6} рад. Чему будет равен размер изображения на плёнке, если угловой размер источника 10^{-7} рад?

5 Пизанская башня

Согнутую в виде спирали металлическую полосу можно использовать в качестве пружины кручения, то есть пружины, препятствующей повороту механизмов (см. рис. 3). При попытке распрямить или скрутить такую пружину она развивает возвращающий момент сил M , пропорциональный углу поворота α : $M = \gamma\alpha$, где γ – постоянный коэффициент жёсткости кручения пружины. Нижний конец лёгкого жёсткого вертикального стержня длиной l жёстко скреплён со свободным концом пружины кручения. Внутренний конец пружины закреплён. К верхнему концу стержня прикладывается сила F , направленная вертикально вниз.

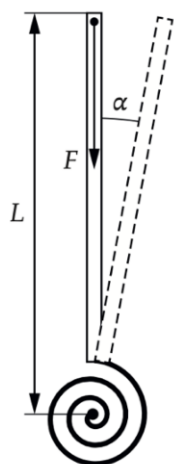


Рис. 3

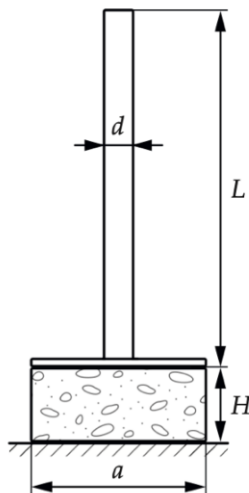


Рис. 4

1. При какой максимальной силе $F_{\max}$ вертикальное положение равновесия стержня ещё будет оставаться устойчивым?
2. Каким будет угол отклонения, если сила воздействия будет равна $F = 1,01F_{\max}$?

Пизанская башня – один из известнейших памятников архитектуры. Башня отличается тем, что её ось отклонена на некоторый угол от вертикали из-за мягкости грунта под её основанием. Рассмотрим модель башни, стоящей на грунте. Башня представляет собой однородный цилиндр, высотой L и диаметром d (рис. 4), масса единицы длины башни равна λ . Башня поставлена по центру на жёсткое невесомое квадратное основание со стороной a , к которому снизу приклеена поролоновая подушка того же сечения. Высота подушки, после установки на неё башни составляет H . Вся конструкция установлена на жёстком столе. Масса распределена по башне однородно. Модуль Юнга поролона равен E . Коэффициент трения между башней и основанием можно считать достаточно большим, так что башня не проскальзывает относительно основания.

3. При какой минимальной высоте башни L_1 она займёт устойчивое наклонное положение?
4. При какой минимальной высоте башни L_2 она опрокинется? Выразите ответ через L_1 и d , считая $d \ll L_1$.

Указание 1. При малой относительной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ растяжения/сжатия стержня с площадью поперечного сечения S сила упругости, возникающая в нём, может быть рассчитана по формуле $F = E\varepsilon S$, где E – модуль Юнга материала стержня.

Указание 2. При ответе на вопросы разных пунктов задачи могут оказаться очень полезными приближённые формулы, справедливые для малых значений α ($\alpha \ll 1$): $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}$.