

МОШ, 2025/26, отборочный этап, 11 класс

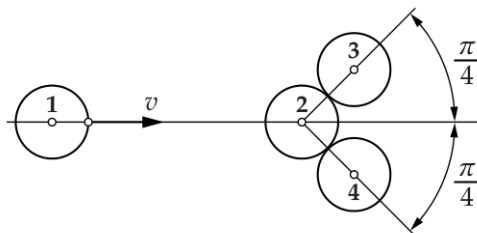
Условия, ответы и решения

1 Аэрохоккей

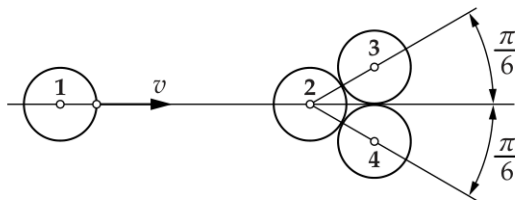
Внимание! При вычислениях следует использовать приближённые равенства: $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{2} \approx 1,41$.

Шайбы одинаковой массы и одинакового размера могут скользить по горизонтальной поверхности без трения. Шайбы гладкие, столкновения между ними можно считать абсолютно упругими. В точках касания на рисунках 1 и 2 шайбы разделены микроскопическими воздушными зазорами различной толщины, так что ни одна шайба не сталкивается одновременно с двумя другими. Для определённости считайте, что в обоих случаях зазор между шайбами 2 и 3 немного меньше, чем между шайбами 2 и 4.

а) (2 балла, по 0,5 балла за каждый ответ) В начальный момент шайбы 2, 3 и 4 расположены так, что их центры образуют вершины равнобедренного прямоугольного треугольника (см. рис. 1). Шайба 1 налетает на шайбу 2 со скоростью $v = 0,8$ м/с. Определите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся. Ответы дайте в см/с, округлите до целого.



б) (4 балла, по 1 баллу за каждый ответ) В этом случае центры неподвижных шайб образуют равносторонний треугольник (см. рис. 2). Шайба 1 налетает на шайбу 2 с той же скоростью $v = 0,8$ м/с, что и в первом случае. Определите скорости шайб после завершения всех столкновений.



Подсказка

При упругом ударе гладких одинаковых шайб касательная к точке контакта составляющая скорости каждой шайбы не меняется, а нормальные составляющие шайбы обмениваются. Разберите столкновения по очереди, в порядке их возможного наступления.

Ответ

$$\text{а) } u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = \frac{v\sqrt{2}}{2} \approx 56 \text{ см/с или } u_3 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 57 \text{ см/с, } u_4 = \frac{v\sqrt{2}}{2} \approx 56 \text{ см/с или } u_4 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 57 \text{ см/с;}$$

$$\text{б) } u_1 = \frac{v}{8} \approx 10 \text{ см/с, } u_2 = \frac{v\sqrt{3}}{8} \approx 17 \text{ см/с, } u_3 = \frac{v\sqrt{3}}{2} \approx 69 \text{ см/с, } u_4 = \frac{v\sqrt{3}}{4} \approx 35 \text{ см/с.}$$

Решение

Скорость k -й шайбы после всех столкновений обозначаем u_k . При абсолютно упругом столкновении гладких шайб тангенциальные компоненты скоростей шайб не меняются, при этом шайбы обмениваются нормальными компонентами скоростей. Под тангенциальной и нормальной компонентами подразумеваются проекции скорости на направление общей касательной в точке взаимодействия шайб и на направление вдоль перпендикуляра к этой касательной соответственно. Этот факт можно получить на основе законов сохранения импульса и энергии.

2 Нагревание моля гелия

Моль гелия нагревается от начальной температуры $T_0 = 200 \text{ К}$ в квазистатическом процессе, в котором молярная теплоёмкость линейно зависит от абсолютной температуры T : $c(T) = R \left(\frac{T}{T_0} - 2 \right)$, где $R = 8,3 \text{ Дж/(моль·К)}$ — универсальная газовая постоянная.

а) (0,5 балла) Получает или отдаёт газ теплоту при увеличении температуры от T_0 до $2T_0$? В ответ впишите знак «+», если теплота к газу подводится, и «-», если теплота отводится.

б) (1,5 балла) Какое количество теплоты получает (или отдаёт) газ при увеличении температуры от T_0 до $2T_0$? В ответ впишите абсолютное значение в кДж, округлите до сотых.

в) (1 балл) Какую работу совершает газ при увеличении температуры от T_0 до $6T_0$? В ответ впишите абсолютное значение в кДж, округлите до сотых.

г) (1 балл) До какого значения должна увеличиться температура газа при нагревании от температуры T_0 , чтобы величина работы, совершённой внешними силами над газом, была максимальной? Ответ дайте в Кельвинах, округлите до целого.

Подсказка

Количество теплоты — это интеграл $\int c dT$, то есть площадь под графиком $c(T)$ (знак учитывайте). Работу найдите из первого начала, зная изменение внутренней энергии одноатомного газа.

Ответ

$$\text{а) «-»; б) } |Q| = \frac{RT_0}{2} = 0,83 \text{ кДж; в) } A = 0; \text{ г) } T_1 = \frac{7T_0}{2} = 700 \text{ К.}$$

Решение

Поскольку $\delta Q = \nu c(T) dT$, количество теплоты можно найти, интегрируя теплоёмкость по температуре. Вычисление интеграла, вообще говоря, можно свести к определению площади под графиком. Таким образом, можно получить соотношения для $Q(x)$ и $A'(x)$, где A' — работа внешних сил, а $x = T/T_0$:

$$Q(x) = \frac{RT_0}{2}(x-1)(x-3), \quad A'(x) = -\frac{RT_0}{2}(x-1)(x-6).$$

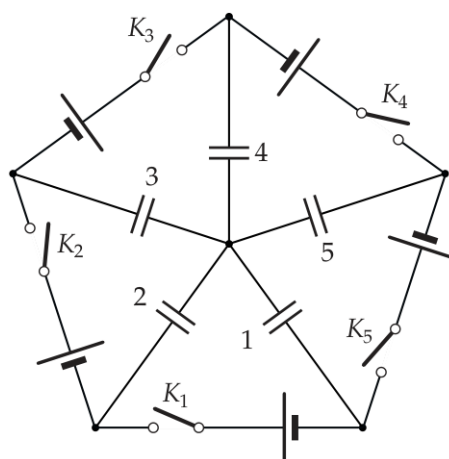
3 Пятиугольник

Из одинаковых конденсаторов ёмкостью $C = 100$ мкФ, батареек с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом, а также ключей собрана цепь в виде пятиугольника. Каждый конденсатор подключён между общей точкой, расположенной в центре описанной окружности, и одной из вершин пятиугольника. Конденсаторы перенумерованы так, как показано на рис. 3. Между соседними вершинами включены последовательно соединённые батарейка и ключ. Изначально все ключи разомкнуты, конденсаторы не заряжены. Сначала замыкают ключ K_1 и ждут установления стационарного режима.

а) (1 балл) Определите количество теплоты, выделяющееся в цепи в процессе установления стационарного режима. Ответ дайте в мДж, округлите до десятых.

После замыкания ключа K_1 и установления стационарного режима замыкают ключ K_2 .

б) (1 балл) Чему равен ток через батарейку, включённую последовательно с ключом K_2 , сразу после его замыкания? Ответ дайте в амперах, округлите до целого.



в) (2 балла) Определите количество теплоты, выделяющееся в цепи в процессе установления зарядов конденсаторов после замыкания ключа K_2 . Ответ дайте в мДж, округлите до десятых.

Далее последовательно замыкают ключи K_3 , K_4 и, после установления стационарного режима, ключ K_5 .

г) (2 балла, по 1 баллу за каждый ответ) Чему равны заряды положительно заряженных обкладок конденсаторов 4 и 5 сразу после замыкания ключа K_5 ? Ответы дайте в мКл, округлите до десятых.

д) (2 балла, по 1 баллу за каждый ответ) Чему равны заряды верхней обкладки конденсатора 1 и нижней обкладки конденсатора 2 спустя длительное время после замыкания ключа K_5 ? Ответ дайте в мКл, округлите до десятых.

Подсказка

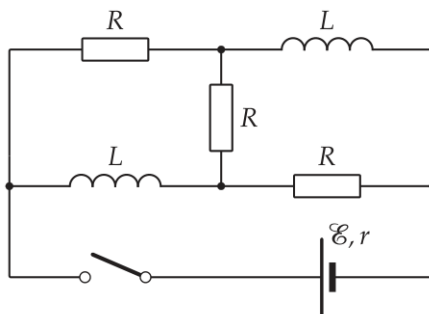
Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе не меняется, а в стационарном режиме токов нет. Для тепла используйте баланс энергии: работа батарей минус изменение энергии конденсаторов.

Ответ

а) $Q_1 = \frac{C\mathcal{E}^2}{4} = 0,4$ мДж; б) $I_2 = \frac{3\mathcal{E}}{2r} = 3$ А; в) $Q_2 = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4} = 1,2$ мДж; г) $q_4 = C\mathcal{E} = 0,4$ мКл, $q_5 = 2C\mathcal{E} = 0,8$ мКл; д) $q'_4 = 0$, $q'_5 = 0$.

4 Две катушки, три резистора

В цепи, представленной на рис. 4, ключ изначально разомкнут. Значения обозначенных на рисунке параметров цепи равны: $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$, $r = 2 \text{ Ом}$, $R = 6 \text{ Ом}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$. Активное сопротивление катушки равно нулю.



Ключ замыкают и в цепи начинается переходный процесс, при этом ток через батарейку меняется в некотором диапазоне, границы которого обозначим через $I_{\min}$ и $I_{\max}$. Считайте известным тот факт, что ток через батарейку в переходном процессе меняется монотонно.

а) (1 балл) Определите значение $I_{\min}$. Ответ дайте в амперах, округлите до десятых.

б) (1 балл) Определите значение $I_{\max}$. Ответ дайте в амперах, округлите до десятых.

Спустя некоторое время после начала переходного процесса ток через батарейку устанавливается. Далее ключ размыкают.

в) (2 балла) Чему равно напряжение на среднем резисторе (расположенном на рис. 4 вертикально) сразу после размыкания ключа? Ответ дайте в вольтах, округлите до целого.

г) (1 балл) Какое количество теплоты выделяется в цепи после размыкания ключа? Ответ дайте в джоулях, округлите до десятых.

д) (1 балл) Какое количество теплоты выделяется на среднем резисторе (расположенном на рис. 4 вертикально) после размыкания ключа? Ответ дайте в джоулях, округлите до десятых.

Подсказка

Сразу после замыкания ток через катушки равен нулю (катушка как разрыв), а при установлении напряжение на катушках нулевое (катушка как провод). После размыкания токи катушек сохраняются.

Ответ

$$\text{а) } I_{\min} = \frac{\mathcal{E}}{r + 3R} = 0,3 \text{ А; } \quad \text{б) } I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r + R/3} = 1,5 \text{ А; } \quad \text{в) } U_R = \frac{4}{3} \cdot \frac{\mathcal{E}R}{r + R/3} = 12 \text{ В; } \quad \text{г) } Q = L \cdot \left(\frac{2}{3} I_{\max} \right)^2 = 0,2 \text{ Дж; } \quad \text{д) } Q_R = \frac{Q}{2} = 0,1 \text{ Дж.}$$

Решение

Обозначим через I_L ток, текущий по виткам одной из катушек. Ток в другой катушке будет таким же в силу симметрии. Можно доказать, что производная dI_L/dt не меняет знака в переходном процессе и становится равна нулю, когда токи в элементах цепи перестают меняться. Причём доказательство не требует решения дифференциального уравнения. Таким образом, данное в условии утверждение о том, что зависимость тока через батарейку от времени — монотонная, является избыточным.

Сразу после замыкания ключа и спустя длительное время после замыкания ключа токи через батарейку равны соответственно:

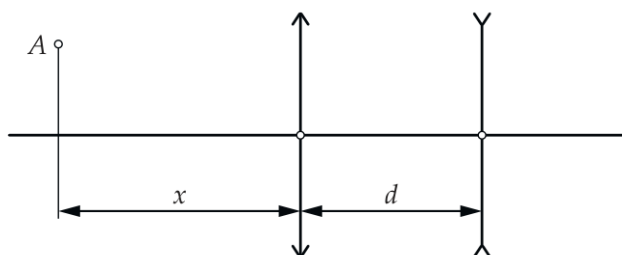
$$I_{\mathcal{E}}(0) = \frac{\mathcal{E}}{r + 3R} = 0,3 \text{ A}, \quad I_{\mathcal{E}}(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{r + R/3} = 1,5 \text{ A}.$$

Сразу после размыкания ключа токи через катушки остаются такими же, как до размыкания. В процессе уменьшения тока через катушки до нуля ток, текущий через средний резистор, оказывается вдвое большим тока, текущего через любой из крайних резисторов. Отсюда следует, что количество теплоты, выделяющееся на среднем резисторе, вдвое больше количества теплоты, выделяющегося на любом из крайних.

5 Две линзы

Две плоские линзы: собирающая с оптической силой 5 дптр и рассеивающая с оптической силой -5 дптр располагаются так, что их оптические оси совпадают (см. рис. 5). При этом расстояние между линзами d равно фокусному расстоянию собирающей линзы. Небольшой предмет A располагается на расстоянии x от собирающей линзы, так что лучи света, исходящие от предмета, проходят сначала через собирающую линзу, а после через рассеивающую.

Известно, что рассматриваемая система линз даёт мнимое изображение предмета только в том случае, если значение x принадлежит интервалу $(a_{\min}; a_{\max})$.



- (1 балл) Определите значение $a_{\min}$. Ответ дайте в см, округлите до целого.
- (1 балл) Определите значение $a_{\max}$. Ответ дайте в см, округлите до целого.
- (1 балл) Чему равно линейное увеличение, с которым изображается предмет в этой системе линз, если значение x равно 30 см.
- (1 балл) При каком минимальном значении x размер изображения, получающегося в этой системе, равен размеру предмета? Ответ дайте в см, округлите до целого.

Подсказка

Примените формулу тонкой линзы дважды: изображение от первой линзы служит предметом для второй. Увеличение системы — произведение увеличений линз.

Ответ

- а) $a_{\min} = 0$; б) $a_{\max} = 2f = 40$ см; в) $\Gamma(1,5f) = 2$; г) $x_1 = f = 20$ см.

Решение

Применив дважды формулу линзы, получим для расстояния между изображением и второй линзой формулу

$$a'_2 = \frac{f^2}{x - 2f},$$

где f — фокусное расстояние собирающей линзы. Мнимое изображение соответствует отрицательным значениям величины a'_2 , при этом надо учесть, что $x > 0$, как следует из условия.

Увеличение в системе линз равно произведению увеличений каждой из линз и в нашем случае равно $\Gamma = \left| \frac{f}{x - 2f} \right|$.