

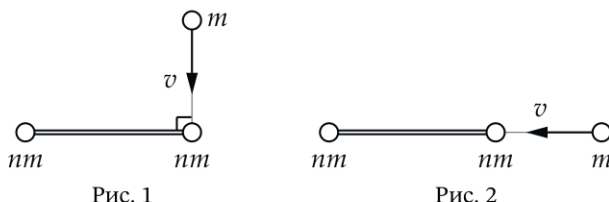
МОШ, 2025/26, заключительный этап, 11 класс

Условия и ответы

1 Неупругие удары

В теории удара столкновение тел характеризуется коэффициентом восстановления e . Он равен отношению модулей проекций относительной скорости точек контакта на общую нормаль после и до удара. В данной задаче считается, что e зависит только от материала тел.

Маленькая гладкая шайба массой m , движущаяся со скоростью v , сталкивается с гантелью из двух одинаковых гладких шайб, каждая из которых имеет массу nm . Шайбы соединены жёстким невесомым стержнем. При ударе перпендикулярно стержню (рис. 1) налетающая шайба после столкновения останавливается. При ударе вдоль оси стержня в одну из шайб (рис. 2) налетающая шайба отскакивает в противоположную сторону со скоростью $v/5$.



1. Найдите отношение массы шайбы гантели к массе налетающей шайбы n и коэффициент восстановления e .

Ответ

$n = 2, e = 0,5$.

2 Колебания поршня

В вертикальном цилиндре под поршнем массой m , способным двигаться вдоль его оси без трения, находится ν молей идеального газа. Давление и температура окружающего воздуха равны P_0 и T_0 , площадь сечения цилиндра — S . Удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме равна c_V . Теплоёмкостью цилиндра и поршня можно пренебречь. Первоначально система находится в равновесии, температура газа равна T_0 .

1. Считая процессы в газе квазистатическими, определите циклическую частоту малых свободных колебаний поршня в двух случаях: при поддержании постоянной температуры газа (Ω_T) и в условиях полной теплоизоляции цилиндра (Ω_S).
2. Пусть теперь цилиндр не изолирован. Мощность теплопередачи вследствие теплообмена между газом под поршнем и окружающим воздухом задаётся выражением:

$$N = \beta(T - T_0),$$

где T — температура газа, β — известный коэффициент. Под действием периодической внешней силы поршень совершает малые вынужденные колебания по закону:

$$y(t) = h \sin(\Omega t),$$

где y — отклонение поршня от положения равновесия, ось OY направлена вверх. Через некоторое время после начала действия силы устанавливаются малые гармонические колебания разности температур $\Delta T = T - T_0$. Определите амплитуду этих колебаний и разность фаз между колебаниями разности температур и вертикальной координаты поршня.

3 Построение

Тонкая собирающая идеальная линза и плоское зеркало (см. рис. 3) расположены параллельно на расстоянии, равном фокусному расстоянию линзы f . Идеальной называется тонкая линза, в которой любые лучи, в том числе идущие под большими углами к оптической оси, преломляются как параксиальные (приосевые).

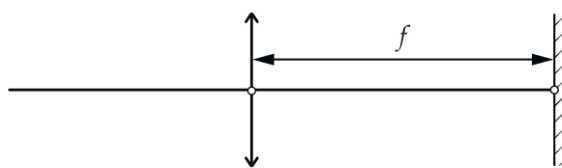


Рис. 3

1. Светящаяся точка находится на расстоянии a от линзы ($f \leq a \leq 2f$) со стороны, противоположной зеркалу. На каком расстоянии от линзы расположено её изображение в этой системе?
2. На рис. 4 показано изображение предмета в виде окружности (плоскость окружности перпендикулярна плоскости зеркала), полученное в этой оптической системе. Известно, что изображение совпадает с предметом; точки L и M , отмеченные на рис. 4, принадлежат линзе и зеркалу соответственно.

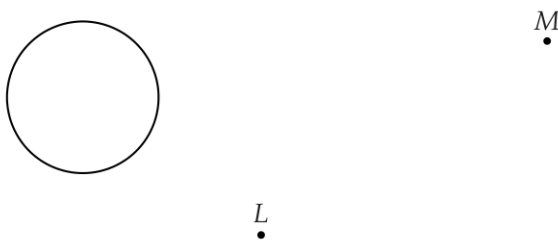


Рис. 4

С помощью циркуля и линейки на дополнительном листе с увеличенным рис. 4 постройте оптический центр и фокусы линзы. Приведите обоснование вашего построения (описывать алгоритм стандартных геометрических построений не требуется). Дополнительный лист с выполненным построением следует сдать вместе с работой.

Ответ

- 1) Изображение находится на расстоянии $2f - a$ от линзы (по критериям оценивания организаторов); 2) построение, ответа в виде формулы нет.

4 Polyswitch

Плавкий предохранитель — это одноразовый защитный элемент. Его современной много разовой альтернативой является самовосстанавливающийся предохранитель (известный также под названием Polyswitch).

В основе устройства лежит полимерный материал с проводящими вкраплениями. При достижении критической температуры $T_{пл}$ в материале происходит фазовый переход: проводящие пути разрушаются, и электрическое сопротивление устройства резко возрастает. При остывании материала ниже $T_{пл}$ структура проводящих путей восстанавливается, и сопротивление возвращается к исходному низкому значению.

Поведение некоторого самовосстанавливающегося предохранителя предлагается описывать с помощью следующей упрощённой модели. При температуре ниже критической температуры $T_{пл} = 120^\circ\text{C}$ его сопротивление постоянно и равно $R_1 = 1\text{ Ом}$. При $T_{пл}$ оно скачкообразно увеличивается до $R_2 = 10\text{ кОм}$ и при дальнейшем нагреве не меняется. В самой точке фазового перехода (при $T = T_{пл}$) сопротивление может принимать любые промежуточные значения в диапазоне от 1 Ом до 10 кОм.

Считайте, что мощность теплоотдачи от предохранителя в окружающую среду описывается соотношением

$$P = \alpha(T - T_0),$$

где $\alpha = 10\text{ мВт}/^\circ\text{C}$ — коэффициент теплоотдачи, $T_0 = 20^\circ\text{C}$ — температура окружающей среды, T — температура предохранителя.

1. Изобразите статическую вольт-амперную характеристику (ВАХ) предохранителя, считая, что в любой точке ВАХ он находится в установившемся тепловом режиме.
2. Пусть предохранитель подключён к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 10\text{ В}$ последовательно с реостатом, сопротивление которого может меняться от 0 до 50 Ом, и катушкой индуктивности L . Считайте, что индуктивность катушки достаточно велика, так что тепловой баланс в предохранителе устанавливается гораздо быстрее, чем меняется ток. Это позволяет описывать состояние предохранителя его статической ВАХ в любой момент времени

Сколько рабочих точек теоретически может реализоваться в цепи при различных значениях сопротивления реостата? Какие из этих точек являются устойчивыми относительно флуктуаций тока в цепи?

Рабочая точка считается устойчивой по току, если при малом отклонении тока от значения в рабочей точке возникающая в катушке ЭДС самоиндукции стремится вернуть цепь в исходное состояние.

3. Теперь рассмотрим реальную цепь. Предохранитель подключили через ключ последовательно с резистором R к двум соединённым последовательно батарейкам 3R12 (ЭДС каждой $\mathcal{E} = 4,5\text{ В}$, внутреннее сопротивление $r = 1\text{ Ом}$). Какой ток установится в цепи после замыкания ключа, если $R = 7\text{ Ом}$?

Опишите качественно процессы, происходящие в цепи после замыкания ключа, если сопротивление резистора равно $R = 2\text{ Ом}$. Учтите, что в этом случае ток может изменяться настолько быстро, что температура предохранителя не будет успевать подстраиваться под текущее значение мощности.

Ответ

1) Холодная ветвь $U = IR_1$ до $I_1 = 1$ А, затем гипербола $U = P_0/I$, где $P_0 = \alpha(T_{\text{пл}} - T_0) = 1$ Вт, до $I_2 = 10$ мА, затем горячая ветвь $U = IR_2$. 2) Критические сопротивления реостата 25 и 9 Ом: при $R > 25$ Ом одна рабочая точка, при $R = 25$ Ом две, при $9 < R < 25$ Ом три, при $R = 9$ Ом две, при $R < 9$ Ом одна; на гиперболе из двух точек устойчива только точка с большим током. 3) При $R = 7$ Ом устанавливается ток 0,9 А (предохранитель не срабатывает); при $R = 2$ Ом начальный ток 1,8 А, равновесия на гиперболе нет, возникают релаксационные автоколебания.

5 Падающий в трубе магнит

При решении этой задачи могут оказаться полезными (а могут и не оказаться) некоторые или все из приведённых ниже формул.

Уравнения для осесимметричного магнитного поля в вакууме в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0.$$

Связь радиальной компоненты B_r осесимметричного поля с магнитным потоком $\Phi(z)$ через диск радиуса R , центр которого лежит на оси OZ в точке с координатой z , а плоскость перпендикулярна этой оси:

$$B_r(R, z) = -\frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{d\Phi}{dz}.$$

Осевая и радиальная составляющие поля магнитного диполя с моментом m (момент направлен вдоль оси OZ):

$$B_z(z, r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m(2z^2 - r^2)}{(z^2 + r^2)^{5/2}}, \quad B_r(z, r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3mzr}{(z^2 + r^2)^{5/2}}.$$

Поле в центре основания постоянного магнита цилиндрической формы (радиус основания a , высота h , магнитный момент m):

$$B_0 = \frac{\mu_0 m}{2\pi a^2 \sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Значения некоторых несобственных интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^4} = \frac{\pi}{32a^5}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^5} = \frac{5\pi}{256a^7}.$$

1. Рассмотрим тонкое кольцо радиуса R , изготовленное из проволоки сечением S ($S \ll R^2$). Проводимость материала кольца (величина, обратная удельному сопротивлению) $\sigma = \frac{1}{\rho}$ известна. Кольцо движется с постоянной скоростью v вдоль оси OZ , которая совпадает с осью симметрии магнитного поля и самого кольца. Считая известными функции $B_z(z, r)$ и $B_r(z, r)$, задающие осевую и радиальную компоненты магнитной индукции, найдите силу, действующую на кольцо в точке с координатой z .
2. В начале координат закреплён небольшой магнит с моментом m , направленным вдоль оси OZ . Вдоль этой же оси движется очень длинная тонкостенная труба радиуса R с толщиной стенки d ($d \ll R$). Ось трубы совпадает с осью OZ , а её скорость v постоянна. Материал трубы имеет проводимость σ . Определите силу взаимодействия трубы и магнита.
3. В вертикальной медной трубе ($R = 1$ см, $d = 1$ мм) падает соосный трубе цилиндрический неодимовый магнит (радиус основания $a = 0,5$ см, высота $h = 2a$). Спустя некоторое время после начала падения скорость магнита становится постоянной. Определите

эту установившуюся скорость, считая что поле вне магнита совпадает с полем точечного диполя, расположенного в его центре и обладающего тем же магнитным моментом. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Плотность материала магнита $\rho_m = 7,4 \text{ г/см}^3$, проводимость меди $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$. Магнит создаёт поле $B_0 = 1 \text{ Тл}$ в центре своего основания. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Ответ

1) $F = 2\pi R \sigma S B_r^2 v$, сила тормозящая (направлена против скорости).