

МОШ, 2025/26, заключительный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 Тонны песка

В пустой контейнер засыпают песок с помощью двух конвейерных лент. Длина каждой ленты составляет $L = 30$ м. Первая лента движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с, с неё в контейнер каждую секунду сыпается $m_1 = 20$ кг песка. Вторая лента движется со скоростью $v_2 = 2$ м/с, с неё в контейнер каждую секунду поступает $m_2 = 10$ кг песка. Ленты включают одновременно, в начальный момент они пусты. Песок начинают подавать на ленты на расстоянии L от контейнера сразу после их включения.

1. За какое наименьшее время после включения лент в контейнер будет загружено $M = 4$ т песка?
2. Сколько килограммов песка поступит в контейнер с каждой ленты к моменту окончания загрузки?

Подсказка

Песок доедет до контейнера не сразу: сначала найди, через сколько секунд после включения он начнёт поступать с каждой ленты.

Ответ

- 1) $T = 145$ с; 2) $M_1 = 2700$ кг, $M_2 = 1300$ кг.

2 Радиус Шварцшильда

При решении задачи могут понадобиться следующие справочные данные: гравитационная постоянная $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$; скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ м; ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = G \frac{M}{R^2} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (здесь M — масса Земли). Приведённые обозначения физических констант остаются неизменными на протяжении всей задачи.

Согласно общей теории относительности, если сжать сферическое тело равномерной плотности до радиуса, меньшего некоторого критического значения R_g , то гравитация на его поверхности станет настолько сильной, что даже свет не сможет покинуть это тело — оно превратится в чёрную дыру. Этот критический радиус, называемый гравитационным, или радиусом Шварцшильда, вычисляется по формуле:

$$R_g = 2 \cdot m^\alpha \cdot G^\beta \cdot c^\gamma,$$

где m — масса тела, α , β и γ — некоторые безразмерные постоянные. Никакие другие характеристики тела (плотность, химический состав и т.п.) на значение R_g не влияют.

1. Пользуясь соображениями размерности, определите значения постоянных α , β и γ .
2. До какого радиуса необходимо сжать Землю, согласно приведённой теории, чтобы она превратилась в чёрную дыру?

Подсказка

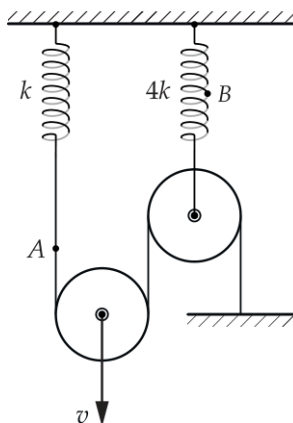
Масса входит в размерность только у m и G , а длина должна получиться в итоге: подбери степени так, чтобы сократились килограммы и секунды.

Ответ

1) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$, то есть $R_g = \frac{2Gm}{c^2}$; 2) $R_g = \frac{2gR^2}{c^2} \approx 9,1 \text{ мм}$.

3 Система с поджатыми пружинами

В системе, изображённой на рисунке 1, невесомая и нерастяжимая нить перекинута через два подвижных невесомых блока. Её правый конец прикреплен к неподвижной горизонтальной стенке, а левый конец — к поджатой пружине жёсткостью $k_1 = k$. Ось правого блока прикреплена к поджатой пружине жёсткостью $k_2 = 4k$. Пороговые значения сил поджатия обеих пружин одинаковы и равны F_0 . Верхние концы пружин жёстко закреплены. В начальный момент времени левый блок начинают равномерно опускать, так что его ось движется с постоянной скоростью v . Известно, что величина силы, прикладываемой к оси блока, в начальный момент равна F_0 . Считайте, что нить не проскальзывает по блокам, трение в осях блоков отсутствует.



1. Определите скорости точки A нити и точки B (середины правой пружины) через время t после начала движения.
2. Найдите зависимость от времени силы F , которую необходимо прикладывать к оси левого блока, чтобы он двигался вниз с постоянной скоростью v .

Примечание. Обе поджатые пружины устроены так: они не деформируются, пока приложенная к ним сила не превысит пороговое значение F_0 . Как только сила становится больше F_0 , пружина начинает растягиваться (или сжиматься), причём её жёсткость k_i определяет связь между изменением силы упругости и деформацией:

$$k_i = \frac{F - F_0}{x_i}, \quad i = 1, 2,$$

где x_i — абсолютная величина деформации (изменение длины) пружины.

Подсказка

Пока сила натяжения нити не превысила F_0 , пружины не деформируются. Свяжи скорость оси левого блока со скоростью нити у неподвижного конца и у пружин, учитывая, что блоки подвижные.

4 Определение плотности

В лаборатории имеется ареометр, который позволяет измерять плотность только в диапазоне от $0,90 \text{ г/см}^3$ до $1,20 \text{ г/см}^3$. Для определения плотности ρ_x неизвестной жидкости, которая легче воды, используется метод смешивания. Готовят три смеси с объёмными долями воды: 0,40, 0,50 и 0,60 (эти значения известны точно). Измерения дают следующие значения плотности смесей: $\rho_1 = 0,912 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 0,926 \text{ г/см}^3$ и $\rho_3 = 0,938 \text{ г/см}^3$. Абсолютная погрешность каждого измерения $\Delta\rho = 0,005 \text{ г/см}^3$. Плотность воды принята равной $\rho = 1,000 \text{ г/см}^3$ точно (эталонное значение).

1. Для каждой смеси вычислите плотность исходной жидкости ρ_x и определите абсолютную погрешность каждого полученного значения. Считайте, что объём смеси равен сумме объёмов смешиваемых жидкостей.
2. Оцените, в каком интервале может находиться истинное значение ρ_x по результатам трёх измерений с учётом их погрешностей.
3. Если бы у вас была возможность провести только одно измерение, какую объёмную долю воды α нужно было бы выбрать, чтобы погрешность определения ρ_x была наименьшей? Учтите, что плотность смеси должна попадать в рабочий диапазон ареометра. Чему равна эта минимальная погрешность? Считайте абсолютную погрешность определения плотности ареометром равной $\Delta\rho$ для любого значения объёмной доли воды.

Подсказка

Выразите плотность смеси через объёмную долю воды и ρ_x , затем получите ρ_x и посмотрите, как погрешность зависит от α .

Ответ

Формулы: $\rho_x = \frac{\rho_i - \alpha\rho}{1 - \alpha}$, $\Delta\rho_x = \frac{\Delta\rho}{1 - \alpha}$; в пункте 3: $\alpha_{\min} = 1/3$, $\Delta\rho_{x,\min} = 0,0075 \text{ г/см}^3$.