

МОШ, 2025/26, заключительный этап, 9 класс

Условия и ответы

1 Разворот системы

Две пристани расположены на противоположных берегах реки шириной 100 м напротив друг друга в точках A и B . Скорость течения реки равна 1 м/с. На том же берегу, где находится пристань B , ниже по течению расположена пристань C . От пристани A отплывает вёсельная лодка, которая держит курс под углом α ($\sin \alpha = 3/5$) к направлению скорости течения реки. Скорость лодки относительно воды всё время остаётся постоянной по модулю и направлению. Одновременно с лодкой от пристани B в сторону пристани C выезжает велосипедист и движется с постоянной скоростью. Доехав до пристани C , он быстро разворачивается на 180° и с прежней скоростью едет обратно в направлении пристани B .

На рис. 1 показана (в неизвестном масштабе) траектория $KLMN$ лодки в системе отсчёта велосипедиста от момента старта (точка K) до момента причаливания к противоположному берегу (точка N). Оси используемой системы координат жёстко связаны с рамой велосипеда (на рисунке не показаны). Разворот велосипедиста на 180° считается мгновенным.

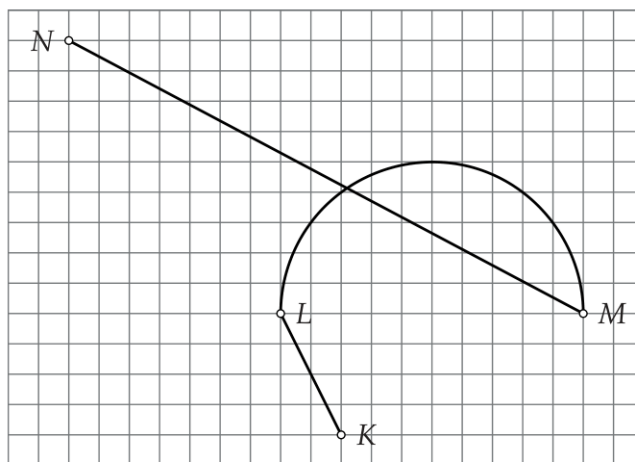


Рис. 1

1. Определите скорость велосипедиста, скорость лодки относительно воды и расстояние между пристанями B и C .

Ответ

$$V = 5 \text{ м/с}; \quad v = 2 \text{ м/с}; \quad S_{BC} \approx 166,7 \text{ м}.$$

2 Трение и нейросеть

На шероховатой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α ($\operatorname{tg} \alpha = 1/2$) удерживается массивная треугольная призма массой $m = 1$ кг, имеющая в сечении прямоугольный треугольник с острым углом α . Призма лежит на плоскости на боковой грани так, что другая её боковая грань (обращённая вверх) горизонтальна. На этой грани лежит лист бумаги, а на листе бумаги — брусок массой m . Брусок при помощи нитки (невесомой и нерастяжимой) соединён с очень лёгким кольцом, надетым на гладкий вертикальный закреплённый стержень (см. рис. 2). Нить не натянута, но и не провисает, так что движение бруска по горизонтали (в случае освобождения системы) в течение некоторого времени исключено.

ы) в течение некоторого времени исключ

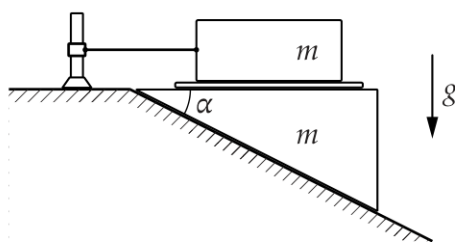


Рис. 2

Коэффициенты трения призмы о бумагу и бруска о бумагу одинаковы и равны μ_1 . Коэффициент трения призмы о наклонную плоскость равен μ_2 . Предполагается, что $0 \leq \mu_1 \leq 1$ и $0 \leq \mu_2 \leq 1$. Систему освобождают.

1. При каких μ_1 и μ_2 клин начнёт двигаться? Изобразите на плоскости (μ_1, μ_2) область, соответствующую найденным значениям.
2. Ниже приведено решение первого пункта задачи, предложенное известной нейросетью. Верно ли оно? Если да, его можно использовать; если нет, укажите допущенные ошибки.

Брусок удерживается нитью и не имеет горизонтального ускорения. Следовательно, сила трения между бруском и бумагой уравнивает горизонтальную реакцию со стороны призмы. Максимальная сила трения между бруском и бумагой равна

$$F_{1,\max} = \mu_1 mg.$$

Эта же по модулю сила действует на призму со стороны бумаги (в противоположную сторону) и направлена горизонтально. На призму действуют: её вес mg , вес бруска mg , нормальная реакция плоскости N_2 и сила трения о плоскость F_2 .

Полная нормальная реакция наклонной плоскости

$$N_2 = 2mg \cos \alpha.$$

Максимальная сила трения призмы о плоскость

$$F_{2,\max} = 2\mu_2 mg \cos \alpha.$$

Составляющая сил, стремящаяся сдвинуть призму вниз по наклонной плоскости: $2mg \sin \alpha$. Горизонтальная сила трения со стороны бумаги даёт проекцию на наклонную плоскость: $F_{1,\parallel} = F_1 \cos \alpha$. В предельном случае $F_1 = \mu_1 mg$, поэтому

$$F_{1,\parallel} = \mu_1 mg \cos \alpha.$$

Условие начала скольжения призмы:

$$2mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha > 2\mu_2 mg \cos \alpha.$$

Сокращая на $mg \cos \alpha$, получаем

$$2 \operatorname{tg} \alpha - \mu_1 > 2\mu_2.$$

При $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ окончательно

$$1 - \mu_1 > 2\mu_2, \quad \mu_2 < \frac{1 - \mu_1}{2}.$$

Таким образом, призма начнёт выскальзывать при

$$\mu_2 < \frac{1 - \mu_1}{2}, \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1.$$

На плоскости (μ_1, μ_2) это область ниже прямой $\mu_2 = \frac{1 - \mu_1}{2}$.

Ответ

1) клин начнёт двигаться при $\mu_2 \leq \frac{2 \operatorname{tg} \alpha - \mu_1}{2 + \mu_1 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2(1 - \mu_1)}{4 + \mu_1}$; 2) решение нейросети неверно: использована статическая реакция $N_2 = 2mg \cos \alpha$, тогда как для движущейся системы нормальная реакция плоскости другая (динамическая).

3 Эффект Магнуса

В спортивных играх с мячом широко применяются кручёные удары, при которых мячу сообщается не только поступательная скорость, но и вращение. В результате мяч движется по сложной траектории и при определённых условиях отклоняется в сторону от вертикальной плоскости, содержащей вектор начальной скорости.

Такая траектория мяча объясняется эффектом Магнуса. Взаимодействие вращающегося мяча с воздухом количественно характеризуется двумя силами: силой сопротивления F_D (направленной противоположно скорости центра мяча) и силой Магнуса F_M , направленной перпендикулярно скорости (см. рис. 3) и также перпендикулярно оси вращения. В этой задаче считается, что ось вращения перпендикулярна направлению скорости центра мяча.

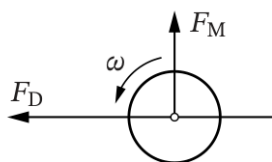


Рис. 3

В первом приближении можно считать, что эти силы задаются формулами:

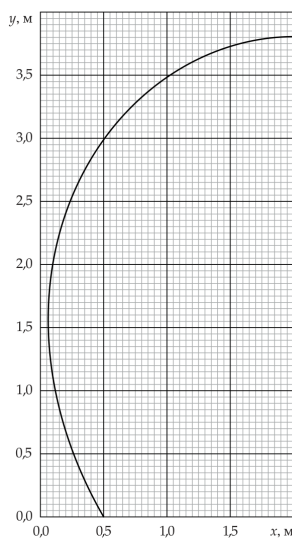
$$F_D = C_D v^2, \quad F_M = C_M \omega v,$$

где C_D и C_M — постоянные коэффициенты, v — скорость центра мяча, ω — угловая скорость его вращения (предполагается, что в процессе полёта она не изменяется).

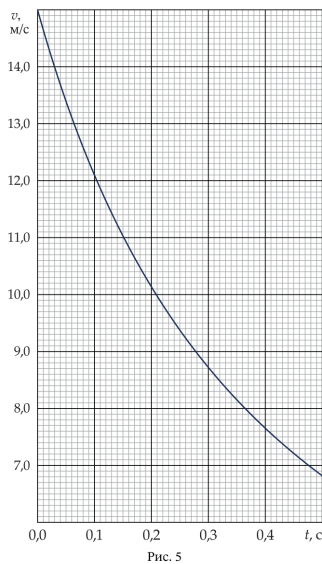
Анализ движения вращающегося тела в поле тяжести при наличии аэродинамических сил достаточно сложен. Поэтому далее мы пренебрежём силой тяжести и ограничимся рассмотрением плоского движения мяча под действием только двух сил: лобового сопротивления F_D и силы Магнуса F_M .

1. Пусть $C_D = 0$, то есть сила сопротивления отсутствует. Известны величины C_M , ω и m . Мяч вылетает из точки A со скоростью v_0 под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонтальной прямой. Найдите расстояние AB , где B — точка повторного пересечения траектории с этой прямой.

2. В этом пункте $C_D \neq 0$. Мяч массой $m = 3$ г вылетает со скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали. Угловая скорость вращения $\omega = 100$ рад/с. Траектория движения мяча за промежуток времени $t_0 = 0,5$ с показана на рис. 4. Этот график получен методом численного моделирования; копия графика представлена на листе 4, см. рис. 7.



Зависимость модуля скорости мяча от времени $v(t)$ за тот же промежуток приведена на рис. 5. Используя графики, определите коэффициенты C_D и C_M с максимально возможной точностью.



Масса 3 г и указанные кинематические параметры типичны для мяча в настольном теннисе при кручёных ударах средней силы.

Копия графика траектории (рис. 7) для работы:

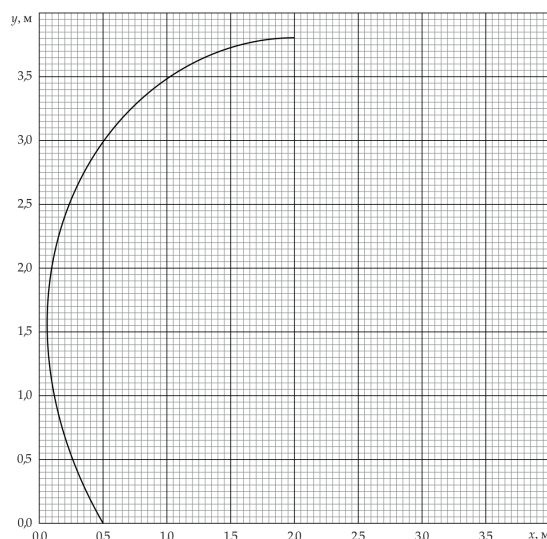


Рис. 7: Траектория движения мяча, к задаче 4

Ответ

1) $AB = R = \frac{mv_0}{C_M \omega}$; 2) $C_M \approx 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$, $C_D \approx 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}$.

4 Нелинейные элементы

Рассмотрим нелинейные элементы Z_1 и Z_2 , сопротивление которых зависит от напряжения на их выводах.

При увеличении напряжения на элементе Z_1 от нуля его сопротивление составляет 100 Ом вплоть до 1,999 В. В узком интервале от 1,999 В до 2,001 В оно линейно возрастает до 200 Ом, после чего остаётся постоянным. Сопротивление элемента Z_2 изменяется противоположным образом: до 1,999 В оно равно 200 Ом, в интервале от 1,999 В до 2,001 В линейно уменьшается до 100 Ом и далее не изменяется.

При анализе цепи следует учитывать конечную ширину переходной области. Однако при построении итоговых графиков этой шириной (0,002 В) можно пренебречь.

1. Изобразите вольт-амперные характеристики элементов Z_1 и Z_2 . Напомним, что вольт-амперной характеристикой (ВАХ) называется зависимость силы тока, протекающего через элемент, от напряжения на нём (ток откладывается по оси ординат, напряжение — по оси абсцисс). Рассмотрите только положительные значения этих величин; на графиках отметьте координаты точек излома.
2. Элементы Z_1 и Z_2 соединили последовательно и подключили к регулируемому источнику напряжения. Начиная с некоторого момента напряжение на выводах этого соединения равномерно увеличивается от нуля и через одну минуту достигает 6 В. Затем оно так же равномерно уменьшается и снова становится равным нулю к концу второй минуты опыта.

Изобразите график зависимости силы тока в цепи от времени $I(t)$. На графике необходимо отметить координаты точек излома, а также локальных максимумов и минимумов тока.

5 Через призму

На рис. 6 приведена фотография листа с текстом олимпиадного задания, на котором лежит прозрачная призма с сечением в форме равностороннего треугольника. Снимок сделан с большого расстояния длиннофокусным объективом, оптическую ось которого старались ориентировать перпендикулярно плоскости листа. Увеличенное изображение этой фотографии приведено на листе 4, см. рис. 8.

1. Используя линейку, определите по фотографиям показатель преломления материала призмы с наилучшей возможной точностью.

На рис. 6 приведена фотография листа с текстом олимпиадного задания, на котором лежит прозрачная призма с сечением в форме равностороннего треугольника. Снимок сделан с большого расстояния длиннофокусным объективом, оптическую ось которого старались ориентировать перпендикулярно плоскости листа. Увеличенное изображение этой фотографии приведено на листе 4, см. рис. 8.

Увеличенная фотография (рис. 8):

На рис. 6 приведена фотография листа с текстом олимпиадного задания, на котором лежит прозрачная призма с сечением в форме равностороннего треугольника. Снимок сделан с большого расстояния длиннофокусным объективом, оптическую ось которого старались ориентировать перпендикулярно плоскости листа. Увеличенное изображение этой фотографии приведено на листе 4, см. рис. 8.

Ответ

$n \approx 1,51$.