Архимедова разминка

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/22, 10 класс, задача 1] **Архимедова разминка.** Данная задача состоит из двух не связанных между собой задач.

Задача 1.1. Шар на дне сосуда. На дне сосуда, заполненного водой, покоится шар радиуса R. Высота уровня воды в сосуде равна h, причём $h = 4R$. Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

1.1.1 Найдите силу давления воды, действующую на верхнюю половину поверхности шара.

Подсказка. Объём шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Площадь поверхности шара равна $S = 4\pi R^2$.

Задача 1.2. Однородный стержень в неоднородной жидкости. В данной задаче рассматриваются условия плавания стержня в жидкости, плотность которой изменяется с глубиной.

Тонкий однородный стержень длины l, изготовленный из материала плотности ρ_0, погружён в сосуд, заполненный жидкостью. Высота уровня жидкости в сосуде равна длине стержня $h = l$. Плотность жидкости у поверхности равна ρ_1, далее она возрастает по линейному закону с увеличением глубины z и достигает значения ρ_2 у дна сосуда.

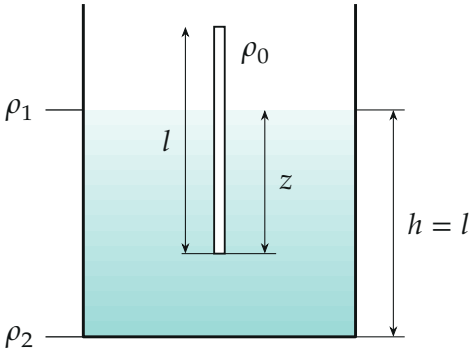


Рис. 1. Стержень в жидкости, плотность которой растёт с глубиной

1.2.1 Установите, при каком соотношении между заданными плотностями ρ_0, ρ_1, ρ_2 стержень может плавать в вертикальном положении.

1.2.2 Найдите глубину погружения нижнего конца стержня z при его вертикальном положении в зависимости от заданных значений плотностей ρ_0, ρ_1, ρ_2.

1.2.3 Установите, при каком соотношении между заданными плотностями ρ_0, ρ_1, ρ_2 стержень может плавать в вертикальном положении, находясь в положении устойчивого равновесия при глубине погружения $z \approx l$. Считайте, что при этом стержень дна не касается. Можно ли реализовать такую ситуацию на практике?

▲ **Решение. Что происходит.** В обеих задачах на тело действует давление жидкости, и вычислять его по поверхности неудобно. Выход один и тот же: заменить сложную поверхность такой, на которой давление известно, и воспользоваться тем, что полная сила давления на замкнутую поверхность — это сила Архимеда, то есть вес вытесненной жидкости. В задаче 1.2 плотность жидкости меняется с глубиной, поэтому вес вытесненной жидкости считаем как площадь под графиком плотности.

Задача 1.1. Обозначим F — искомую силу давления воды на верхнюю половину шара, F_1 — силу давления на плоский «срез» по диаметру, F_A — силу Архимеда для половины шара.

1. Мысленный разрез. Силу давления на сферическую поверхность напрямую считать трудно: давление зависит от глубины, а направление силы на каждом участке своё. Мысленно разрежем шар по горизонтальному диаметру и рассмотрим верхнюю половину вместе с плоским срезом. Вода давит на неё по всей замкнутой поверхности: сверху и сбоку — на сферическую часть, снизу — на плоский срез. Горизонтальные составляющие силы на сферическую часть взаимно уничтожаются по симметрии, поэтому сила $\vec{F}$ вертикальна и направлена вниз.

2. Сила давления на срез. Срез — круг площадью πR^2, его центр на высоте R над дном, то есть на глубине $h - R = 3R$. Срез лежит в горизонтальной плоскости, поэтому давление одно и то же во всех его точках и равно гидростатическому на глубине центра:

$$F_1 = \rho g\,(4R - R) \cdot \pi R^2 = 3\pi R^3 \rho g.$$

Сила $\vec{F}_1$ направлена вверх: вода под срезом давит на него снизу.

3. Сила Архимеда. Равнодействующая сил давления на замкнутую поверхность — вес вытесненной воды, направленный вверх: $F_A = \rho g \cdot \frac{2}{3}\pi R^3$ (объём половины шара $\frac{2}{3}\pi R^3$).

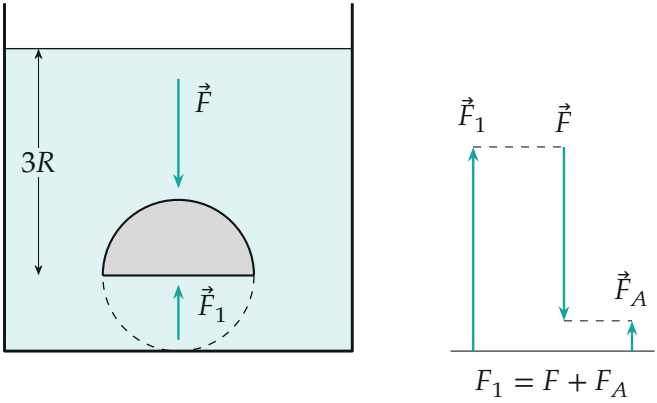


Рис. 2. Слева — силы на верхнюю половину шара; справа — их баланс в масштабе (в единицах $\pi R^3 \rho g$: $F_1 = 3$, $F = 7/3$, $F_A = 2/3$)

4. Баланс сил. Верхняя половина шара вместе со срезом образует замкнутую поверхность. Сумма сил давления на неё — сила Архимеда, направленная вверх. Спроецируем на вертикаль, направив ось вверх:

$$F_1 - F = F_A \quad \Rightarrow \quad F = F_1 - F_A = 3\pi R^3 \rho g - \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g = \frac{7}{3}\pi R^3 \rho g.$$

Обратите внимание: сила F на сферическую половину *больше* её собственной силы Архимеда: на неё давит вся вода над ней, а не только вытесненный объём. Нижняя половина шара прижата ко дну, воды под ней нет, и ей сила Архимеда не помогает.

Проверка: давление на самой верхней точке шара $2\rho g R$, на экваторе $3\rho g R$, а площадь горизонтальной проекции верхней половины πR^2. Значит, F лежит между $2\pi R^3 \rho g$ и $3\pi R^3 \rho g$; полученные $\frac{7}{3}\pi R^3 \rho g$ в этом промежутке. Размерность $\rho g R^3$ — ньютон.

Задача 1.2. Ось z направлена вниз от поверхности жидкости. S — площадь сечения стержня, m — его масса, $\rho(z)$ — плотность жидкости на

глубине z.

5. Плотность жидкости. Плотность линейно растёт от ρ_1 на поверхности ($z = 0$) до ρ_2 на дне ($z = l$):

$$\rho(z) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l}\, z.$$

6. Сила Архимеда на погружённую часть. Нижний конец стержня на глубине z, погружена часть длиной z. Тонкий слой стержня толщиной ds на глубине s вытесняет жидкость массой $\rho(s) S\, ds$. Суммируя по всей погружённой части, получаем вес вытесненной жидкости:

$$F_A = Sg \int_0^z \rho(s)\, ds = Sg\, \frac{\rho_1 + \rho(z)}{2}\, z = Sg \left(\rho_1 z + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l}\, z^2 \right).$$

Интеграл от линейной функции — это площадь трапеции: средняя плотность $\dfrac{\rho_1 + \rho(z)}{2}$, умноженная на глубину.

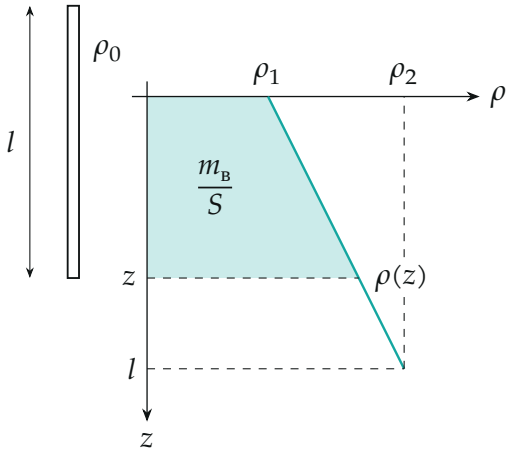


Рис. 3. Масса вытесненной жидкости на единицу площади сечения — площадь заливки

Обратите внимание: формула с «средней плотностью» годится только потому, что $\rho(z)$ линейна. Для другого закона нужен интеграл.

7. Условие плавания (1.2.1). Стержень плавает вертикально, когда сила тяжести $mg = \rho_0 l S g$ уравновешена силой Архимеда. Сила Архимеда не может превысить значение при полном погружении $z = l$:

$$F_A(l) = Sg\,\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}\,l.$$

Значит, равновесие в вертикальном положении возможно, только если $\rho_0 l S g \le F_A(l)$, то есть

$$\rho_0 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

В правой части — средняя плотность жидкости по всей глубине. При ρ_0 выше неё стержень тонет.

8. Глубина погружения (1.2.2). Приравняем силу тяжести и силу Архимеда:

$$\rho_0 l = \rho_1 z + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l}\,z^2.$$

Это квадратное уравнение относительно z. Нужен корень, лежащий между 0 и l; им служит корень со знаком «плюс» перед радикалом:

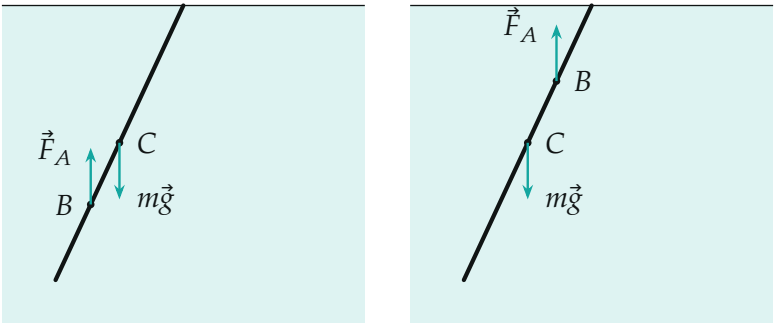
$$z = l\,\frac{\sqrt{\rho_1^2 + 2\rho_0(\rho_2 - \rho_1)} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Вес от z не зависит, а F_A растёт: $dF_A/dz = Sg\rho(z) > 0$. Поэтому корень единственный, и равновесие по высоте устойчиво: нырнёт глубже — вытолкнет, поднимется — опустится.

Проверка: при $\rho_2 \to \rho_1$ (однородная жидкость) формула переходит в $z \to \dfrac{\rho_0}{\rho_1}\,l$ — обычное плавание стержня.

9. Устойчивость при $z \approx l$ (1.2.3). В равновесии по высоте силы тяжести и Архимеда равны и противоположны, но приложены в разных точках: тяжести — в центре масс стержня C на расстоянии $\dfrac{l}{2}$ от его концов, Архимеда — в центре давления B, центре тяжести вытесненной жидкости. Рассмотрим малый наклон стержня на угол θ. Если B выше C (ближе к поверхности), то при наклоне сила Архимеда оказывается

сдвинутой в сторону наклона верхнего конца, и пара сил поворачивает стержень обратно к вертикали. Если B ниже C, пара опрокидывает его.



(а) $\rho_2 > \rho_1$: B ниже C (б) $\rho_2 < \rho_1$: B выше C

Рис. 4. Стержень, чуть наклонённый из вертикали (верхний конец у поверхности); (а) пара сил $m\vec{g}$, $\vec{F}_A$ увеличивает наклон, (б) возвращает стержень

10. Где центр давления. Центр масс однородного стержня — в его середине, на глубине $\dfrac{l}{2}$. Центр давления лежит на глубине, равной среднему положению вытесненной массы:

$$z_B = \frac{\int_0^l \rho(s)\, s\, ds}{\int_0^l \rho(s)\, ds} = \frac{\frac{\rho_1}{2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{3}}{\frac{\rho_1+\rho_2}{2}}\, l = \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{3(\rho_1+\rho_2)}\, l.$$

Устойчивость требует $z_B < \dfrac{l}{2}$, то есть $2(\rho_1 + 2\rho_2) < 3(\rho_1 + \rho_2)$, откуда

$$\rho_2 < \rho_1.$$

Равновесие по высоте при $z \approx l$ требует, по пункту 7, ещё $\rho_0 \approx \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$. Вместе: $\rho_2 < \rho_0 < \rho_1$, причём ρ_0 почти посередине.

11. Можно ли это осуществить. Условие $\rho_2 < \rho_1$ означает, что более плотная жидкость лежит *над* менее плотной. Такое расслоение неустойчиво: небольшое возмущение приводит к конвекции, жидкости перемешиваются, и неоднородность исчезает быстрее, чем можно поставить опыт. На практике реализовать такую ситуацию нельзя.

Проверка: при $\rho_2 = \rho_1$ формула даёт $z_B = \dfrac{l}{2}$ — центр давления совпадает с центром масс, равновесие безразличное, как у обычного стержня в однородной жидкости. Условие $\rho_2 < \rho_1$ — ровно переход через этот случай.

Смысл задачи: в жидкости с переменной плотностью сила Архимеда считается как вес вытесненной массы, а при наклоне важно не только равенство сил, но и взаимное положение их точек приложения.

Ответ. 1.1.1) $F = \dfrac{7}{3}\pi R^3 \rho g$; 1.2.1) $\rho_0 < \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$; 1.2.2) $z = l\,\dfrac{\sqrt{\rho_1^2 + 2\rho_0(\rho_2 - \rho_1)} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$; 1.2.3) $\rho_2 < \rho_1$ и $\rho_0 \approx \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$; на практике такая ситуация нереализуема: более плотная жидкость над менее плотной перемешивается.