Знаете ли Вы МКТ?

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/22, 10 класс, задача 2] **Знаете ли Вы МКТ?** В данном задании вам необходимо решить несколько взаимосвязанных задач, чтобы продемонстрировать своё понимание основ молекулярно-кинетической теории и умение использовать математический аппарат этой теории.

Часть 1. Всего один шарик.

В вертикальном закрытом сосуде высотой h находится небольшой шарик массы m, движущийся вертикально. Сопротивлением воздуха следует пренебречь, а его удары о дно и крышку сосуда считать абсолютно упругими, ускорение свободного падения равно g. Когда шарик находится у дна сосуда, его скорость равна v_0. Можно считать, что удары шарика происходят достаточно часто, поэтому следует рассчитывать средние силы давления шарика за промежуток времени, значительно превышающий время между ударами.

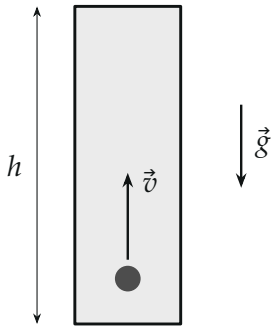

Рис. 1

1.1 Найдите среднюю силу давления шарика на дно сосуда, если $v_0^2 < 2gh$.

1.2 Пусть скорость шарика у дна сосуда $v_0 > \sqrt{2gh}$. Рассчитайте средние силы давления шарика на дно и крышку сосуда, а также разность этих сил.

Часть 2. Очень много молекул.

В закрытом с обеих сторон цилиндрическом сосуде находится лёгкий подвижный тонкий поршень, который делит сосуд на две равные части. Площадь поршня (она же площадь поперечного сечения сосуда) равна S. По обе стороны от поршня находится по одному молю одноатомного идеального газа, молярная масса которого равна M. Температура газа с обеих сторон поршня одинакова и равна T_0, давление газа P_0. Поршень начинает двигаться вдоль сосуда с постоянной скоростью u, которая значительно меньше средней скорости теплового движения молекул газа. Действие силы тяжести не учитывать. Удары молекул о поршень можно считать абсолютно упругими.

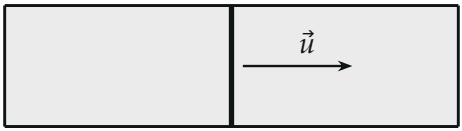

Рис. 2

2.1 Чему равны среднеквадратичная скорость молекул газа $\langle v_{\text{кв.}} \rangle$ и среднеквадратичная проекция скорости газа на произвольное направление (например, на ось x) $\langle v_{\text{кв.}x} \rangle$?

2.2 Оцените силу сопротивления, действующую на поршень со стороны газа в начальный момент его движения. Считайте, что пластина уже имеет скорость u, но её смещением можно пренебречь.

2.3 Оцените изменение температур газа с обеих сторон от поршня при смещении поршня на малую величину Δx.

Указание. При строгом решении данной задачи следует использовать различные средние значения. При проведении оценок везде используйте среднеквадратичные скорости и их проекции.

▲ **Решение. Что происходит.** Во всех пунктах давление газа — это импульс, который молекулы передают стенке за единицу времени. Поэтому везде работает одна идея: средняя сила равна переданному импульсу, делённому на время, $F = \Delta p / \Delta t$. В части 2 добавляется движущийся поршень: относительно него молекулы летят быстрее, и каждый удар уносит от поршня не только импульс, но и энергию.

Часть 1.

1. Закон движения шарика. Между ударами на шарик действует только сила тяжести, поэтому движение равноускоренное; ось z направим вверх от дна:

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Шарик возвращается на дно, когда $z = 0$: через $\Delta t = \dfrac{2v_0}{g}$.

2. Пункт 1.1. При $v_0^2 < 2gh$ высота подъёма $\dfrac{v_0^2}{2g} < h$, шарик до крышки не долетает (рис. 3, а). За один удар о дно импульс шарика меняется с $-mv_0$ на $+mv_0$ (упругий удар, проекция на ось z), то есть дну передаётся $2mv_0$. Средняя сила за время между ударами по второму закону Ньютона в импульсной форме:

$$\langle F \rangle = \frac{2mv_0}{2v_0/g} = mg.$$

Обратите внимание: в среднем шарик давит на дно с силой тяжести — среднее ускорение за период равно нулю, и вес уравновешен средней силой дна.

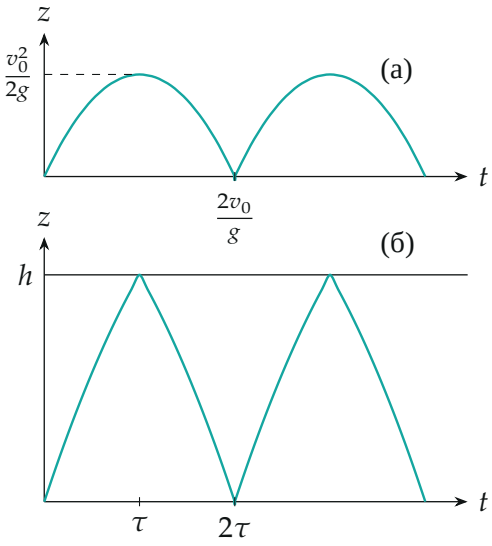

Рис. 3. Высота шарика: (а) $v_0^2 < 2gh$ — дуги парабол до дна; (б) $v_0^2 > 2gh$ — дно, крышка и снова дно за время 2τ (нарисовано для $v_0^2 = 1{,}5 \cdot 2gh$)

3. Пункт 1.2. Пусть $v_0 > \sqrt{2gh}$. Тогда шарик долетает до крышки. Скорость у крышки (энергия сохраняется на пути вверх):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Движение равноускоренное, поэтому средняя скорость на подъёме $\dfrac{v_0 + v_1}{2}$, время подъёма

$$\tau = \frac{h}{(v_0 + v_1)/2} = \frac{2h}{v_0 + v_1}.$$

После упругого удара о крышку шарик падает вниз за то же время τ и прилетает ко дну со скоростью v_0 (рис. 3, б). Полный цикл — дно, крышка, дно — длится 2τ.

4. Силы на дно и крышку. За цикл дну передаётся импульс $2mv_0$, крышке — $2mv_1$:

$$F_1 = \frac{2mv_0}{2\tau} = \frac{mv_0}{2h}(v_0 + v_1), \qquad F_2 = \frac{2mv_1}{2\tau} = \frac{mv_1}{2h}(v_0 + v_1).$$

Разность:

$$F_1 - F_2 = \frac{m(v_0^2 - v_1^2)}{2h} = \frac{m \cdot 2gh}{2h} = mg \quad \Rightarrow \quad F_1 - F_2 = mg,$$

то есть дно давит сильнее крышки ровно на вес шарика.

Проверка: при $v_0 \to \sqrt{2gh}$ имеем $v_1 \to 0$, $F_2 \to 0$, $F_1 \to \dfrac{mv_0^2}{2h} = mg$ — переходим к пункту 1.1. Второй способ: за цикл суммарный импульс шарика не меняется, значит, силы стенок уравновешивают вес: $(F_1 - F_2) \cdot 2\tau = mg \cdot 2\tau$.

Часть 2.

5. Скорости молекул (2.1). Среднеквадратичная скорость из кинети-

ческой энергии одного моля одноатомного газа $\dfrac{M\langle v^2\rangle}{2} = \dfrac{3}{2}RT_0$:

$$\langle v_{\text{кв.}}\rangle = \sqrt{\frac{3RT_0}{M}}.$$

Все направления равноправны, $\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle$, а сумма равна $\langle v^2\rangle$, поэтому

$$\langle v_{\text{кв.}x}\rangle = \frac{\langle v_{\text{кв.}}\rangle}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}.$$

6. Удар о движущийся поршень. При упругом ударе меняется только проекция скорости на нормаль к поршню; ось x направим вдоль оси сосуда. Пусть поршень движется со скоростью u навстречу молекуле с проекцией скорости v_{x0} (модуль). В системе отсчёта поршня молекула подлетает со скоростью $v_{x0} + u$ и после упругого удара улетает с той же скоростью; возвращаясь в систему сосуда, прибавляем u ещё раз:

$$v'_x = (v_{x0} + u) + u = v_{x0} + 2u.$$

Молекула получает импульс

$$\Delta p = m(v_{x0} + 2u) + mv_{x0} = 2m(v_{x0} + u),$$

столько же передаёт поршню, и её кинетическая энергия возрастает на

$$\Delta E = \frac{m}{2}(v_{x0} + 2u)^2 - \frac{m}{2}v_{x0}^2 \approx 2mv_{x0}u \qquad (u \ll v_{x0}).$$

Обратите внимание: приращение скорости — $2u$, а не u. От этого зависит ответ пункта 2.3.

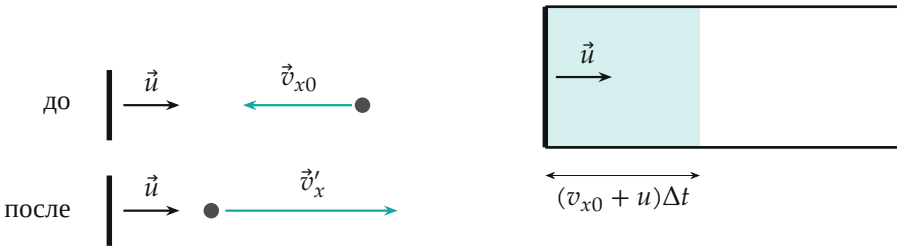

Рис. 4. Слева — удар молекулы о поршень, летящий навстречу, до и после; справа — молекулы, долетающие до поршня за Δt

7. Сила сопротивления (2.2). За малое время Δt до поршня долетают молекулы из слоя толщиной $(v_{x0}+u)\Delta t$ (рис. 4, справа): за это время молекула проходит $v_{x0}\Delta t$, а поршень идёт им навстречу на $u\Delta t$. Объём слоя $S(v_{x0}+u)\Delta t$, молекул в нём $nS(v_{x0}+u)\Delta t$, из них к поршню летит половина (по оси x молекулы поровну влево и вправо). Импульс, переданный поршню:

$$\Delta p_\Sigma = \frac{1}{2}\, nS(v_{x0}+u)\Delta t \cdot 2m(v_{x0}+u) = mnS\,(v_{x0}+u)^2\Delta t.$$

Здесь n — концентрация; по указанию берём $v_{x0} = \langle v_{\text{кв.}x}\rangle$. Это сила F_+ со стороны газа, к которому поршень приближается. С другой стороны поршень удаляется, скорость сближения $v_{x0}-u$, и $F_- = mnS(v_{x0}-u)^2$. Сила сопротивления — разность:

$$F = F_+ - F_- = 4mnSv_{x0}u.$$

Выражаем: $m = \dfrac{M}{N_A}$, $n = \dfrac{P_0}{kT_0}$, $v_{x0} = \sqrt{\dfrac{RT_0}{M}}$, $kN_A = R$:

$$F = 4\,\frac{M}{N_A}\,\frac{P_0}{kT_0}\sqrt{\frac{RT_0}{M}}\,Su = 4P_0\sqrt{\frac{M}{RT_0}}\,Su.$$

Проверка: $F = 4P_0S\,\dfrac{u}{v_{x0}}$ — сила давления газа P_0S, умноженная на малое u/v_{x0}; при $u \to 0$ сила исчезает.

8. Нагрев и охлаждение (2.3). Поршень движется, например, впра-

во. Газ справа сжимается: молекулы, ударившись о поршень, приобретают энергию $2mv_{x0}u$ каждая. Газ слева расширяется: удар о удаляющийся поршень отнимает у молекулы ту же энергию, и он охлаждается. За малое время Δt о поршень ударяются $\frac{1}{2}nSv_{x0}\Delta t$ молекул (здесь $u \ll v_{x0}$, поправкой на скорость поршня пренебрегаем), поэтому энергия газа справа растёт на

$$\Delta E = \frac{1}{2}nSv_{x0}\Delta t \cdot 2mv_{x0}u = mnv_{x0}^2\, S\,\Delta x = P_0 S\,\Delta x, \qquad \Delta x = u\Delta t,$$

потому что $mnv_{x0}^2 = P_0$ (давление идеального газа, $P_0 = nkT_0$, $kT_0 = mv_{x0}^2$). Это — работа поршня над газом, $P_0\,\Delta V$, как и должно быть. Энергия одного моля одноатомного газа $\frac{3}{2}RT$, значит $\frac{3}{2}R\,\Delta T = P_0 S\,\Delta x$:

$$\Delta T = \frac{2P_0 S\,\Delta x}{3R}.$$

Справа нагрев на ΔT, слева охлаждение на такую же величину.

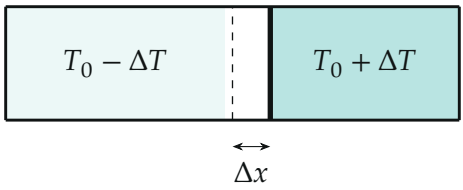

Рис. 5. Сдвиг поршня вправо: справа газ сжат и нагрет, слева разрежен и охлаждён

Проверка: тот же ΔT даёт адиабата одноатомного газа $TV^{2/3} = \text{const}$: $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{2}{3}\cdot\frac{S\Delta x}{V_0}$ при $V_0 = \frac{RT_0}{P_0}$, откуда $\Delta T = \frac{2P_0 S\Delta x}{3R}$. Условия: Δx мало, $u \ll v$.

Обратите внимание: в официальном решении в выражении для приращения энергии молекулы взято $(v_{x0}+u)^2$ вместо $(v_{x0}+2u)^2$, из-за чего ответ оказывается вдвое меньше. Здесь использована скорость отлёта $v_{x0}+2u$ из пункта 6, и результат подтверждён адиабатой.

Ответ. 1.1) $\langle F\rangle = mg$; 1.2) $F_1 = \dfrac{mv_0}{2h}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right)$ (на дно), $F_2 = \dfrac{m\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{2h}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}\right)$ (на крышку), $F_1 - F_2 = mg$; 2.1) $\langle v_{\text{кв.}}\rangle = \sqrt{\dfrac{3RT_0}{M}}$, $\langle v_{\text{кв.}x}\rangle = \sqrt{\dfrac{RT_0}{M}}$; 2.2) $F = 4P_0\sqrt{\dfrac{M}{RT_0}}\,Su$; 2.3) справа нагрев, слева охлаждение на $\Delta T = \dfrac{2P_0S\Delta x}{3R}$.