Электромобиль

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/22, 10 класс, задача 3] **Электромобиль.** Игрушечный электромобиль снабжён электродвигателем ЭД, подключённым к источнику постоянного напряжения U_0. Для регулировки скорости электромобиля используется переменный резистор R, электрическое сопротивление которого изменяется от нуля до некоторого максимального значения $R_{\max}$. Электрическая схема электромобиля показана на рисунке. Сопротивлением проводов, обмотки двигателя и внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

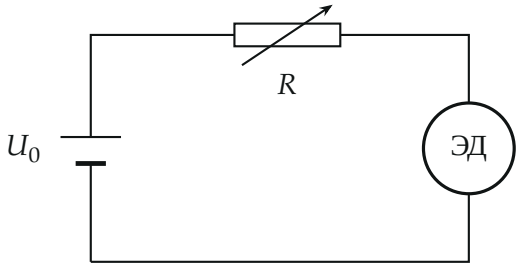

Рис. 1

При испытании игрушки оказалось, что:

1) сила тяги F, развиваемая электродвигателем (переданная на его ведущие колёса), пропорциональна силе тока I, протекающего через обмотку двигателя:

$$F = kI, \qquad (1)$$

2) сила сопротивления воздуха F_c, действующая на автомобиль, пропорциональна квадрату скорости автомобиля v:

$$F_c = \beta v^2. \qquad (2)$$

В формулах (1) – (2) k и β — некоторые постоянные размерные коэффициенты.

При испытании электромобиля оказалось, что максимальная скорость, которую может достичь автомобиль, движущийся по твёрдой горизонтальной поверхности (когда можно пренебречь силой трения

качения), равна $v_{\max}$, при этом сила тока в цепи равна I_0. При застопоренном двигателе минимальная сила тока в цепи равна I_1, причём $\frac{I_1}{I_0} = \gamma$. При численных расчётах считайте, что $\gamma = 2{,}0$.

При решении задачи учитывайте, что единственным известным параметром является величина γ, поэтому все окончательные формулы должны содержать только этот параметр!

Часть 1. Движение по твёрдой горизонтальной поверхности.

В данной части считайте, что на движущийся автомобиль действует только сила сопротивления воздуха (сила трения качения пренебрежимо мала). Вам требуется рассчитать характеристики электромобиля при его установившемся равномерном движении по твёрдой горизонтальной поверхности. Для теоретического описания движения электромобиля удобно использовать следующие относительные величины:

– отношение сопротивления переменного резистора к его максимальному сопротивлению:

$$x = \frac{R}{R_{\max}}; \qquad (3)$$

– отношение скорости электромобиля к его максимальной скорости:

$$y = \frac{v}{v_{\max}}; \qquad (4)$$

– отношение силы тока в цепи к силе тока при максимальной скорости:

$$z = \frac{I}{I_0}. \qquad (5)$$

1.1 Получите систему уравнений, позволяющую найти зависимости относительной скорости и относительной силы тока от относительного сопротивления резистора $y(x)$ и $z(x)$. В эту систему уравнений помимо указанных переменных может входить только единственный известный параметр γ.

1.2 Найдите зависимость относительной скорости электромобиля от

относительного сопротивления резистора $y(x)$.

1.3 Найдите зависимость относительной силы тока в цепи от относительного сопротивления резистора $z(x)$.

1.4 Найдите зависимость КПД электродвигателя η от его скорости $\eta(y)$.

1.5 Постройте точные графики полученных зависимостей $y(x)$, $z(x)$, $\eta(y)$.

Часть 2. Движение электромобиля по ковру.

В этой части рассматривается движение электромобиля по ковру, когда на электромобиль помимо описанной силы сопротивления воздуха действует постоянная, не зависящая от скорости, сила трения качения, равная:

$$F_{\text{тр.}} = \varepsilon\beta v_{\max}^2, \qquad (6)$$

где $v_{\max}$ — определённая ранее максимальная скорость при движении по твёрдой горизонтальной поверхности; $\varepsilon = 0{,}10$.

2.1 Рассчитайте, при каких значениях относительного сопротивления x переменного резистора электромобиль сможет двигаться по ковру.

2.2 Определите, как изменится максимальная скорость движения электромобиля вследствие появления силы трения качения.

Подсказка. При работе электродвигателя в его обмотке возникает ЭДС самоиндукции!

▲ **Решение. Что происходит.** Вращающийся двигатель работает ещё и как генератор: в его обмотке возникает ЭДС, направленная против тока, и она растёт со скоростью. Поэтому ток в цепи не равен U_0/R, и закон Ома для всей цепи записать нельзя — ЭДС неизвестна. Обходим это двумя законами, в которые ЭДС не входит: равномерное движение (сила тяги равна силе сопротивления) и закон сохранения энергии (мощность источника идёт в тепло на резисторе и в работу двигателя). Затем переходим к безразмерным величинам, чтобы остался один параметр γ.

Обозначения. I — ток в цепи, v — скорость автомобиля, $\mathcal{E}$ — ЭДС двигателя (в ответ не войдёт).

Часть 1.

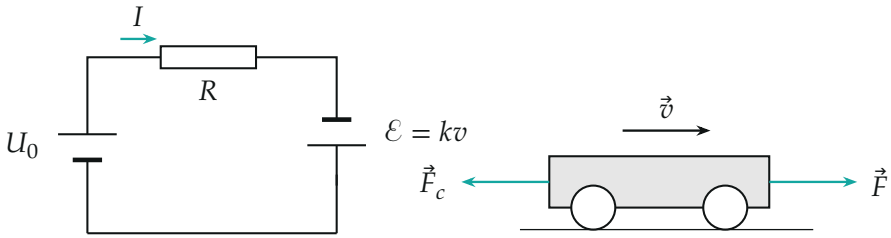

Рис. 2. Слева — эквивалентная схема: двигатель действует как источник ЭДС $\mathcal{E}$ против тока; справа — силы на автомобиль при равномерном движении

1. Равномерное движение. Автомобиль едет с постоянной скоростью, значит, сила тяги уравновешивает сопротивление воздуха:

$$kI = \beta v^2. \qquad (7)$$

2. Закон сохранения энергии для цепи. За время dt источник отдаёт энергию $U_0 I\,dt$. Она идёт на тепло в резисторе $I^2R\,dt$ и на работу двигателя, а двигатель целиком (потерь в обмотке нет) тратит её на работу против сопротивления воздуха, мощность которой $F_c v = \beta v^3$:

$$U_0 I = I^2 R + \beta v^3. \qquad (8)$$

Обратите внимание: равенство $U_0 = IR$ здесь неверно — часть напряжения источника «гасит» ЭДС двигателя.

3. Два крайних режима. Они нужны, чтобы выразить через γ величины U_0, $R_{\max}$, β, k.

Двигатель застопорен. Скорость $v = 0$, ЭДС нет, ток $I = U_0/R$ наименьший при наибольшем сопротивлении: $I_1 = U_0/R_{\max}$.

Максимальная скорость. Она достигается при $R = 0$ (чем меньше сопротивление, тем быстрее едет автомобиль — см. ниже график). Тогда (7) и (8) дают

$$kI_0 = \beta v_{\max}^2, \qquad U_0 I_0 = \beta v_{\max}^3. \qquad (9)$$

4. Безразмерные уравнения (1.1). Подставим $R = xR_{\max}$, $v = yv_{\max}$,

$I = zI_0$. Уравнение (7) с учётом первого равенства (9):

$$kI_0 z = \beta v_{\max}^2 y^2 \quad \Rightarrow \quad z = y^2.$$

Уравнение (8): $U_0 I_0 z = I_0^2 R_{\max}\, xz^2 + \beta v_{\max}^3 y^3$. Разделим на $U_0 I_0 = \beta v_{\max}^3$ и учтём $\dfrac{I_0 R_{\max}}{U_0} = \dfrac{I_0}{I_1} = \dfrac{1}{\gamma}$:

$$z = \frac{xz^2}{\gamma} + y^3 \quad \Rightarrow \quad xz^2 + \gamma y^3 - \gamma z = 0.$$

Система для $y(x)$, $z(x)$:

$$\boxed{z = y^2, \qquad xz^2 + \gamma y^3 - \gamma z = 0}$$

5. Скорость и ток (1.2, 1.3). Подставим $z = y^2$ во второе уравнение: $xy^4 + \gamma y^3 - \gamma y^2 = 0$. Сократим на y^2 (случай $y = 0$ соответствует застопоренному двигателю):

$$xy^2 + \gamma y - \gamma = 0.$$

Нужен положительный корень:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x}, \qquad z(x) = y^2(x) = \left(\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x}\right)^2.$$

Проверка: при $x \to 0$ раскладываем корень: $\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} \approx \gamma + 2x - \dfrac{2x^2}{\gamma}$, откуда $y \to 1 - \dfrac{x}{\gamma} \to 1$, как и в определении $v_{\max}$; y убывает с ростом x.

6. КПД двигателя (1.4). Полезная мощность двигателя — мощность против сопротивления воздуха βv^3, затраченная — мощность, снимаемая с источника $U_0 I$. КПД считаем как отношение этой мощности к

мощности источника (часть последней уходит в тепло на резисторе):

$$\eta = \frac{\beta v^3}{U_0 I} = \frac{\beta v_{\max}^3 y^3}{U_0 I_0 z} = \frac{y^3}{z} = y.$$

КПД равен относительной скорости: $\eta(y) = y$.

Проверка другим способом. Электрическая мощность двигателя равна $\mathcal{E}I$ и целиком идёт в механическую $Fv = kIv$. Значит, $\mathcal{E} = kv$, и закон Ома для цепи с двигателем — $U_0 = IR + kv$. При $R = 0$ получаем $U_0 = kv_{\max}$. Подставим в безразмерном виде: $U_0 = IR + kv$ даёт $1 = \dfrac{zx}{\gamma} + y$; с $z = y^2$ это то же квадратное уравнение $xy^2 + \gamma y - \gamma = 0$. Так что ЭДС «неизвестна» только формально: она равна kv.

7. Таблица и графики (1.5). Расчёт по формулам для $\gamma = 2$:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y = \eta$	1,00	0,92	0,85	0,81	0,77	0,73
z	1,00	0,84	0,73	0,65	0,59	0,54

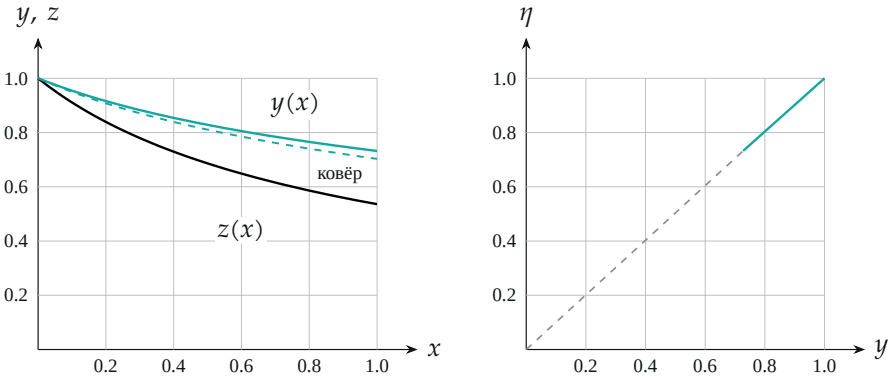

Рис. 3. Слева — $y(x)$, $z(x)$ (пунктир — $y(x)$ при ковре, часть 2), справа — $\eta(y) = y$; сплошным показан диапазон y от 0,73 до 1, достижимый при $0 \le x \le 1$

Часть 2.

8. Новые уравнения (2.1). Теперь сила тяги уравновешивает и воздух, и трение. Равномерное движение: $kI = F_{\text{тр.}} + \beta v^2$. Энергия: источник отдаёт $U_0 I$, тратится на тепло I^2R и на работу против обеих сил, $U_0 I = I^2R + F_{\text{тр.}} v + \beta v^3$. Перейдём к безразмерным величинам, как в п. 4, с $F_{\text{тр.}} = \varepsilon\beta v_{\max}^2$:

$$z = \varepsilon + y^2, \qquad z = \frac{xz^2}{\gamma} + \varepsilon y + y^3.$$

9. Когда автомобиль трогается (2.1). В момент старта $y = 0$, ток равен току застопоренного двигателя $z = \dfrac{\gamma}{x}$, и он не обязан удовлетворять равенству (7): автомобиль только трогается, а не едет равномерно. Автомобиль сдвинется, пока тяга больше трения: $kI > F_{\text{тр.}}$, то есть $z > \varepsilon$:

$$\frac{\gamma}{x} > \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x < \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{2{,}0}{0{,}10} = 20.$$

Это значение намного больше любого возможного $x \le 1$, поэтому электромобиль сдвинется с места при любом положении резистора.

10. Максимальная скорость (2.2). Она достигается при $x = 0$. Подставим $x = 0$ в уравнения п. 8: $z = \varepsilon + y^2$ и $z = \varepsilon y + y^3$, откуда

$$\varepsilon + y^2 = \varepsilon y + y^3 \;\Rightarrow\; (1 - y)(\varepsilon + y^2) = 0 \;\Rightarrow\; y = 1.$$

Максимальная скорость не изменилась. Физическая причина — в п. 6: при $R = 0$ напряжение источника целиком уравновешено ЭДС двигателя, $U_0 = kv$, и скорость определена только отношением U_0/k, а не нагрузкой. Трение увеличивает ток, но не скорость.

Проверка: для $x > 0$ из $1 = \dfrac{zx}{\gamma} + y$ и $z = \varepsilon + y^2$ следует $x = \dfrac{\gamma(1 - y)}{\varepsilon + y^2}$; при $x = 1$ получаем $y \approx 0{,}70$ против 0,73 без ковра: ковёр замедляет всё, кроме предельного случая $R = 0$ (на рис. 3 слева пунктир при ковре лежит ниже сплошной).

Ответ. 1.1) $z = y^2$, $xz^2 + \gamma y^3 - \gamma z = 0$; 1.2) $y(x) = \dfrac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x}$;

1.3) $z(x) = y^2(x)$; 1.4) $\eta = y$; 1.5) таблица и графики выше; 2.1) трогается при $x < \gamma/\varepsilon = 20$, то есть при любом $0 \leq x \leq 1$; 2.2) максимальная скорость не изменится ($y = 1$).