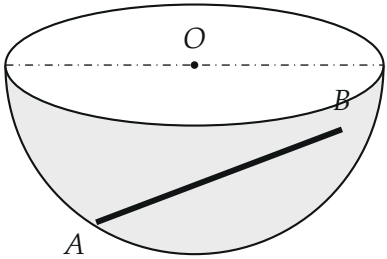
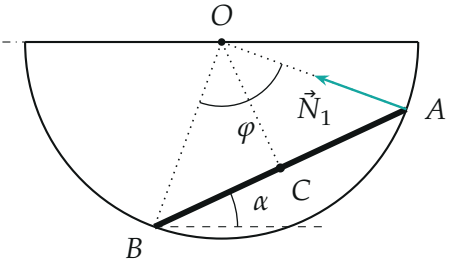
Иголка в сферическом бокале

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/2022, 11 класс, задача 1] В полусферическую чашу помещён однородный массивный жёсткий стержень AB массы m, длина которого меньше диаметра чаши. На следующем рисунке показано вертикальное сечение, в плоскости которого постоянно находится стержень AB. Из центра чаши O стержень AB виден под углом $\angle AOB = \varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Положение стержня задаётся углом наклона стержня к горизонту α.



Обозначим: $\vec{N}_1$ — сила нормальной реакции, действующей на стержень на конце A.



1. Определите, является ли горизонтальное положение стержня положением устойчивого равновесия при отсутствии трения между стержнем со стенками чаши.

Далее считайте, что коэффициент трения между торцами стержня и стенками чаши равен $\mu = 0{,}25$.

2. Пусть стержень находится в положении равновесия, располагаясь под углом α к горизонту. Определите, в каких пределах может изменяться значение модуля силы реакции $\vec{N}_1$. Постройте схематические графики зависимостей граничных значений модуля силы N_1 от угла α. Укажите на этом графике область возможных значений модуля силы N_1.

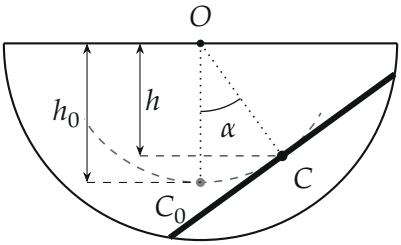
3. Рассчитайте численные значения углов α, при которых стержень может находиться в положении равновесия.

▲ **Решение. Что происходит.** Угол $AOB = 90°$ фиксирует длину стержня: $l = R\sqrt{2}$. Стержень — хорда, его центр масс C всегда на расстоянии $OC = R/\sqrt{2}$ от O и движется по дуге окружности. Без трения равновесие возможно, только когда C лежит под O. С трением стержень держится и наклонённым: сила трения покоя не задана однозначно, она лишь не превосходит μN. Поэтому N_1 определяется промежутком, а его границы дают неравенства $|F_{\text{тр}}| \le \mu N$ на обоих концах. Квадрат $OADB$ делает все направления сил осями этого квадрата.

Обозначения. R — радиус чаши; C — середина стержня; A — верхний конец; $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ — нормальные реакции на концах (направлены к O); $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ — силы трения покоя (по касательным к сфере); D — четвёртая вершина квадрата $OADB$.

Пункт 1. Равновесие без трения.

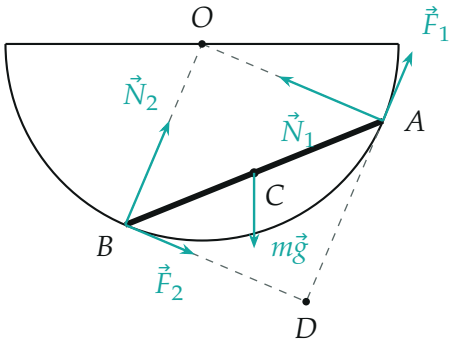
Центр масс — середина хорды, $OC \perp AB$, и OC образует с вертикалью угол α (стороны углов взаимно перпендикулярны). Поэтому высота центра масс над O равна $y_C = -\dfrac{R}{\sqrt{2}}\cos\alpha$.



C_0 — центр масс в горизонтальном положении. Центр масс идёт по дуге радиуса $R/\sqrt{2}$ с центром O; в наклонённом положении он выше: $h < h_0$.

Потенциальная энергия стержня $mg\,y_C = -mg\dfrac{R}{\sqrt{2}}\cos\alpha$ минимальна при $\alpha = 0$ и растёт при любом отклонении. Без трения реакции работы не совершают (перпендикулярны скоростям концов), энергия сохраняется, и отклонённый стержень колеблется около $\alpha = 0$ — равновесие устойчиво. Это именно равновесие: нормальные реакции проходят через O, их момент относительно O нулевой, момент силы тяжести $mg\dfrac{R}{\sqrt{2}}\sin\alpha$ обращается в нуль только при $\alpha = 0$. Обратите внимание: без трения наклонённым стержень в равновесии быть не может — поэтому в п. 2 нужно трение.

Пункт 2. Пределы N_1 при $\mu = 0{,}25$.



Нормальные реакции направлены к O, силы трения — по касательным; все четыре силы параллельны сторонам квадрата $OADB$. Стрелки трения — положительное направление: $F_1 > 0$ вверх по чаше, $F_2 > 0$ вниз по чаше.

Все силы лежат в одной плоскости: независимых уравнений три (две проекции и моменты), неизвестных четыре (N_1, N_2, F_1, F_2). Три из них выразим через N_1, а оставшуюся свободу зададут неравенства трения покоя $|F_1| \le \mu N_1$, $|F_2| \le \mu N_2$. Уравнения выбираем так, чтобы в каждое входила одна лишняя сила. Правило моментов применимо, потому что стержень покоится.

Моменты относительно B (силы $\vec{N}_2, \vec{F}_2$ проходят через B). Плечи $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_1$ — стороны квадрата, равные R; плечо силы тяжести $\dfrac{l}{2}\cos\alpha =$

$\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\alpha$:

$$N_1R + F_1R - mg\frac{R}{\sqrt{2}}\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; F_1 = \frac{mg}{\sqrt{2}}\cos\alpha - N_1.$$

Проекции на направление BD (оно параллельно OA, вниз под углом $45^\circ - \alpha$ к горизонту; $\vec{F}_1$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны ему, $\vec{N}_1 \parallel \vec{DB}$):

$$F_2 + mg\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \alpha\Big) - N_1 = 0 \;\Rightarrow\; F_2 = N_1 - \frac{mg}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Моменты относительно D (силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ лежат на сторонах AD, BD). Плечи $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ равны R; C — середина диагонали OD, поэтому плечо силы тяжести — горизонтальное расстояние $\frac{R}{\sqrt{2}}\sin\alpha$:

$$N_2R - N_1R - mg\frac{R}{\sqrt{2}}\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_2 = N_1 + \frac{mg}{\sqrt{2}}\sin\alpha.$$

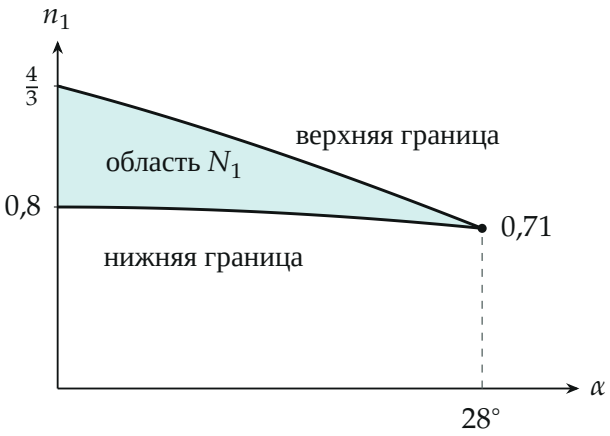
В единицах $\frac{mg}{\sqrt{2}}$ ($n_1 = \frac{\sqrt{2}N_1}{mg}$ и т. д.):

$$f_1 = \cos\alpha - n_1, \qquad f_2 = n_1 - \cos\alpha + \sin\alpha, \qquad n_2 = n_1 + \sin\alpha.$$

Каждое из условий $|f_1| \le \mu n_1$, $|f_2| \le \mu n_2$ — два неравенства:

$$f_1 \le \mu n_1:\ \ n_1 \ge \frac{\cos\alpha}{1+\mu}, \qquad f_1 \ge -\mu n_1:\ \ n_1 \le \frac{\cos\alpha}{1-\mu},$$
$$f_2 \le \mu n_2:\ \ n_1 \le \frac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha, \quad f_2 \ge -\mu n_2:\ \ n_1 \ge \frac{\cos\alpha}{1+\mu} - \sin\alpha.$$

Из них действуют более сильные: нижняя граница $\frac{\cos\alpha}{1+\mu}$ (она выше, чем $\frac{\cos\alpha}{1+\mu} - \sin\alpha$) и верхняя $\frac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha$ (она ниже, чем $\frac{\cos\alpha}{1-\mu}$).



Границы $n_1(\alpha)$ при $\mu = 0{,}25$ в единицах $\dfrac{mg}{\sqrt{2}}$; закрашена область возможных значений.

Результат пункта 2:

$$\frac{mg}{\sqrt{2}}\,\frac{\cos\alpha}{1+\mu} \;\le\; N_1 \;\le\; \frac{mg}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha\Big).$$

Границы сходятся в одной точке графика; правее неё допустимых значений N_1 нет — равновесия нет.

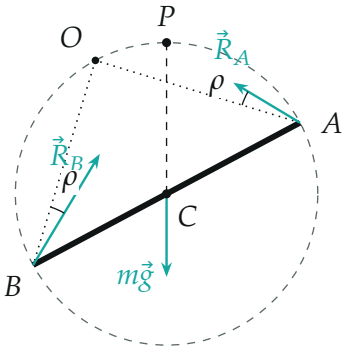
Пункт 3. Какие α возможны. Область существует, пока верхняя граница не ниже нижней; предельный угол — в точке пересечения:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{1+\mu} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{1}{1-\mu} - \frac{1}{1+\mu} = \frac{2\mu}{1-\mu^2}.$$

При $\mu = 0{,}25$: $\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \dfrac{0{,}5}{0{,}9375} \approx 0{,}533$, $\alpha_{\max} \approx 28{,}1°$. Так как A — верхний конец, $\alpha \ge 0$: равновесие возможно при $0 \le \alpha \le 28°$.

Второй способ. На пределе трение на обоих концах предельное, и полная реакция конца отклонена от нормали на угол трения ρ, $\operatorname{tg}\rho = \mu$. Три силы ($\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, $m\vec{g}$) уравновешены, если их линии пересекаются в одной точке P. Так как $\angle OAB = \angle OBA = 45°$, а трение на концах направлено в разные стороны от нормалей, $\vec{R}_A$ идёт под углом $45° + \rho$

к стержню, $\vec{R}_B$ — под $45^\circ - \rho$. Угол $APB = 90^\circ$, значит P лежит на окружности с диаметром AB, и $CP = CA$. Вертикаль CP образует со стержнем угол $90^\circ - \alpha$, а из равнобедренного треугольника ACP этот угол равен $180^\circ - 2(45^\circ + \rho) = 90^\circ - 2\rho$. Значит, $\alpha_{\max} = 2\rho$ и $\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \dfrac{2\mu}{1-\mu^2}$ — ответы совпали.



Предельный случай: линии $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ и $m\vec{g}$ пересекаются в точке P окружности с диаметром AB.

Обратите внимание. Трение покоя нельзя писать как μN: равенство $|F| = \mu N$ выполняется только на границах промежутка.

Проверка. Размерность: $N_1 \sim mg$ — сила. Предел $\mu \to 0$: $\operatorname{tg}\alpha_{\max} \to 0$, наклонённых равновесий нет, как и в п. 1; при $\alpha = 0$ обе границы стремятся к $\dfrac{mg}{\sqrt{2}}$ — вертикальная составляющая каждой реакции $N/\sqrt{2}$ равна $mg/2$, как и должно быть у симметричного стержня. Числовой перебор N_1 при $\alpha = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 28^\circ$ даёт те же границы, при $28{,}2^\circ$ допустимых значений нет. Смысл: трение удерживает стержень лишь пока наклон меньше удвоенного угла трения.

Ответ. 1) да, горизонтальное положение — устойчивое равновесие; 2) $\dfrac{mg}{\sqrt{2}}\dfrac{\cos\alpha}{1+\mu} \le N_1 \le \dfrac{mg}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\cos\alpha}{1-\mu} - \sin\alpha\right)$, графики и область — на рисунке; 3) $\operatorname{tg}\alpha_{\max} = \dfrac{2\mu}{1-\mu^2} \approx 0{,}53$, равновесие возможно при $\alpha \le 28^\circ$.