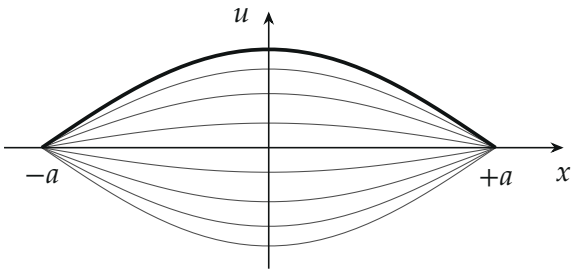
Гитарная струна

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/2022, 11 класс, задача 2] В данной задаче рассматриваются малые поперечные колебания гитарной струны с закреплёнными концами. Основная мода (тип, форма) колебания этой струны показана на рисунке (жирная линия — форма струны в начальный момент времени, тонкие линии — её форма в другие последовательные моменты времени). Для описания колебаний струны введём ось x, которая совпадает с положением струны в состоянии равновесия. Координаты точек крепления струны $\pm a$ (длина струны равна $2a$). Колебания струны описываются функцией $u(x,t)$ — зависимостью отклонения точки струны с координатой x от времени.



В состоянии равновесия струна натянута, сила натяжения равна T. При малых колебаниях струны изменением силы натяжения струны можно пренебречь. Линейная плотность (масса единицы длины) струны равна ρ.

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

В данной части рассмотрим бесконечную струну, сила натяжения которой равна T, а линейная плотность ρ. По струне пробегают гармонические волны с малой амплитудой U_0. Круговая частота этих волн ω, длина волны λ.

1.1 Запишите функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x соответственно.

1.2 Покажите, что при наложении этих волн возникает стоячая волна. Получите функцию $u(x,t)$, описывающую эту стоячую волну.

1.3 Выразите скорость распространения бегущих волн через характеристики волны ω и λ.

Часть 2. Колебания закреплённой струны.

Рассмотрим колебания закреплённой струны, показанные на рисунке. Обозначим круговую частоту изображённого типа колебаний ω; в этой части вам необходимо выразить эту частоту через характеристики струны: её длину $2a$, силу натяжения T и линейную плотность ρ.

2.1 Запишите функцию $u(x,t)$, описывающую рассматриваемый тип колебаний струны.

Обозначим отклонение центральной точки струны от положения равновесия $u_0(t)$, а её скорость $v_0(t)$.

2.2 Выразите кинетическую энергию $E(t)$ движения всей струны через скорость её центра $v_0(t)$.

2.3 Выразите потенциальную энергию деформации струны $W(t)$ через координату центра струны $u_0(t)$.

2.4 Выразите круговую частоту рассматриваемых колебаний ω через параметры струны a, ρ, T.

2.5 Получите формулу для скорости распространения бегущих волн по бесконечной струне.

Математические подсказки. 1) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. 2) $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$. 3) $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$. 4) Длина изогнутой струны, показанной на рисунке, описывается приближённой формулой $l = 2a\left(1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi u_0}{2a}\right)^2\right)$, где u_0 — отклонение центра струны.

▲ **Решение. Что происходит.** Отклонение одного места натянутой струны тянет соседей, поэтому струна проводит волны. Две одинаковые волны, бегущие навстречу, дают стоячую волну: форма не бежит, а только качается вверх-вниз, и есть точки, которые не двигаются никогда (узлы). У струны, закреплённой на концах, концы — узлы, и это определяет длину волны. В части 2 частота находится через энергию — кинетическая и энергия растяжения обмениваются, как у груза на пружине, — а сравнение с частью 1 даёт скорость волны.

Обозначения. $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; U_0 — амплитуда; c — скорость волны; все колебания малы: $|u| \ll a$.

Часть 1.

1.1. Бегущая волна — это колебание $U_0 \cos \omega t$ в начале координат, повторяемое точкой x с запаздыванием x/c (вправо) или с опережением (влево):

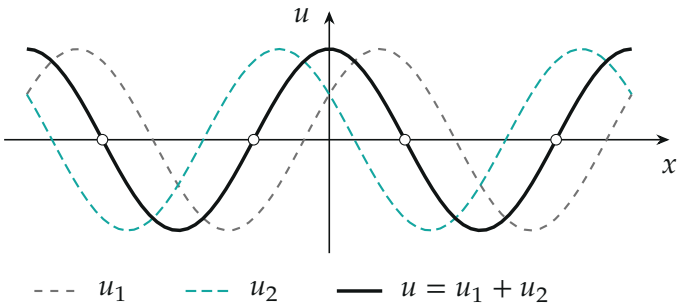
$$u_1 = U_0 \cos(\omega(t - x/c)) = U_0 \cos(\omega t - kx), \qquad u_2 = U_0 \cos(\omega t + kx),$$

где $k = \omega/c$ — как будет показано в п. 1.3 — равно $2\pi/\lambda$.

1.2. Сложим волны и воспользуемся первой подсказкой с $\alpha = \omega t - kx$, $\beta = \omega t + kx$:

$$u = u_1 + u_2 = 2U_0 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$= 2U_0 \cos\omega t \cos kx = 2U_0 \cos\omega t \cos\frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Время и координата разделились: все точки колеблются с одной частотой и фазой, амплитуда $2U_0 |\cos kx|$ зависит от места — это стоячая волна. Узлы там, где $\cos kx = 0$, то есть через $\lambda/2$ друг от друга.



Моментальный снимок при $\omega t = 60°$ ($U_0 = 1$, масштаб по и условный). Кружки — узлы, расстояние между ними $\lambda/2$.

1.3. Точка волны u_1 с постоянной фазой $\omega t - kx = \text{const}$ движется по закону $x = \dfrac{\omega}{k} t + \text{const}$ — это и есть скорость волны. За один период

$T_0 = 2\pi/\omega$ волна проходит одну длину λ:

$$c = \frac{\lambda}{T_0} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k}.$$

Часть 2.

2.1. Из рисунка видно, что на струне укладывается одна «горка» без узлов внутри, концы $x = \pm a$ неподвижны. Ищем стоячую волну $u = U_0 \cos\omega t \cos kx$ из п. 1.2 (амплитуду $2U_0$ обозначим снова U_0 — это отклонение центра). Условие $u(\pm a, t) = 0$ даёт $\cos ka = 0$, то есть $ka = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Рисунок без узлов внутри соответствует $n = 0$: $k = \frac{\pi}{2a}$, $\lambda = 4a$:

$$u(x,t) = U_0 \cos\omega t \cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Начальный момент $t = 0$ — жирная линия на рисунке.

2.2. Скорость точки струны $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ (производная при фиксированном x):

$$v(x,t) = -U_0\omega \sin\omega t \cos\frac{\pi x}{2a} = v_0(t)\cos\frac{\pi x}{2a}, \qquad v_0 = -U_0\omega\sin\omega t.$$

Разобьём струну на малые участки длиной Δx; скорость на участке можно считать одной. Масса участка $\rho\Delta x$, его кинетическая энергия $\Delta E = \frac{\rho\Delta x}{2} v^2$. Сложим энергии всех участков:

$$E = \frac{\rho v_0^2}{2}\sum_i \cos^2\frac{\pi x_i}{2a}\Delta x_i = \frac{\rho v_0^2}{2}\sum_i \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{\pi x_i}{a}\Big)\Delta x_i = \frac{\rho v_0^2}{2}\cdot a.$$

Здесь использована вторая подсказка; сумма $\sum \Delta x_i = 2a$ даёт $\frac{1}{2}\cdot 2a = a$, а сумма косинусов равна нулю: на отрезке длиной $2a$ у $\cos\frac{\pi x}{a}$ ровно один период, положительная и отрицательная половины одинаковы.

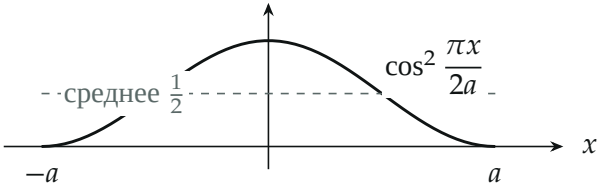


График $\cos^2 \frac{\pi x}{2a}$ *на струне: площадь под ним равна площади прямоугольника высотой* $\frac{1}{2}$*, то есть* $\frac{1}{2} \cdot 2a = a$.

2.3. Струна натянута с силой T, и по условию при малых колебаниях T не меняется. Тогда энергия деформации — работа, затраченная на удлинение струны от $2a$ до l: $W = T\,\Delta l$, $\Delta l = l - 2a$. Здесь важно, что Δl второго порядка малости по u_0, а потому им нельзя пренебречь, заменив струну прямой. По четвёртой подсказке

$$\Delta l = 2a \cdot \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi u_0}{2a}\Big)^2 = \frac{\pi^2 u_0^2}{8a}, \qquad W = T\Delta l = \frac{\pi^2 T}{8a}\,u_0^2.$$

Проверим подсказку: длина малой дуги $\sqrt{dx^2 + du^2} \approx \big(1 + \frac{1}{2}u_x'^2\big)dx$, $u_x' = -u_0 \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi x}{2a}$; интеграл от $\sin^2$ по $[-a, a]$ равен a, значит $\Delta l = \frac{1}{2}\big(\frac{\pi u_0}{2a}\big)^2 a = \frac{\pi^2 u_0^2}{8a}$ — так же.

2.4. Трения нет, струна замкнута, поэтому полная энергия сохраняется:

$$\frac{\rho a}{2}\,v_0^2 + \frac{\pi^2 T}{8a}\,u_0^2 = \text{const}, \qquad v_0 = \dot{u}_0.$$

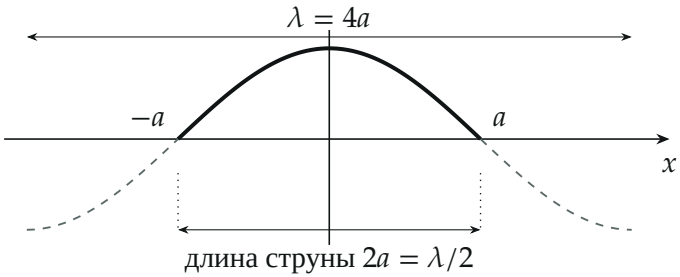
Это та же форма, что $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \text{const}$ у груза на пружине: «масса» $m_{\text{эфф}} = \rho a$, «жёсткость» $k_{\text{эфф}} = \frac{\pi^2 T}{4a}$. Значит, u_0 колеблется гармонически с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{эфф}}}{m_{\text{эфф}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 T/(4a)}{\rho a}} = \frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

2.5. Колебание из п. 2.1 — стоячая волна вида п. 1.2, то есть сумма

двух бегущих волн с $k = \dfrac{\pi}{2a}$, $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 4a$ (на струне длиной $2a$ — ровно полволны). Частота у неё ω из п. 2.4, значит, по п. 1.3

$$c = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \frac{4a}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2a}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$



Струна — половина длины волны $\lambda = 4a$ (жирная часть).

Обратите внимание. Потенциальная энергия — это $T\Delta l$ с постоянным T, а не $\frac{1}{2}k\Delta l^2$ с упругой силой при каждом растяжении: по условию натяжение при малых колебаниях не меняется. И $\Delta l \propto u_0^2$: энергия квадратична по смещению именно поэтому, а линейного члена нет.

Проверка. Размерность: $[T/\rho] = \dfrac{\text{Н}}{\text{кг/м}} = \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$, так что c — скорость. Второй способ: для u из п. 2.1 уравнение Ньютона для участка Δx в линейном приближении даёт $\rho\, u_{tt} = T\, u_{xx}$; подстановка $u_{tt} = -\omega^2 u$, $u_{xx} = -\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 u$ даёт тот же $\omega = \dfrac{\pi}{2a}\sqrt{T/\rho}$. Смысл: скорость волны на струне зависит только от натяжения и линейной плотности и не зависит от длины струны и частоты.

Ответ. 1.1) $u_1 = U_0\cos(\omega t - kx)$, $u_2 = U_0\cos(\omega t + kx)$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; 1.2) $u = 2U_0\cos\omega t\,\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}$ — стоячая волна; 1.3) $c = \dfrac{\lambda\omega}{2\pi}$; 2.1) $u = U_0\cos\omega t\,\cos\dfrac{\pi x}{2a}$; 2.2) $E = \dfrac{\rho a}{2}v_0^2$; 2.3) $W = \dfrac{\pi^2 T}{8a}u_0^2$; 2.4) $\omega = \dfrac{\pi}{2a}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$; 2.5) $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$.