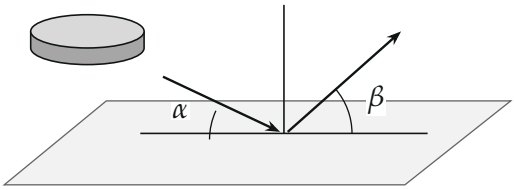
«Блинчики» на воде

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/2022, 11 класс, задача 3] Каждый из Вас когда-либо пытался бросать камень на озёрную гладь, добиваясь отскоков. Конечно, чем больше блинчиков получится — тем лучше! Однако данный трюк повторить не так-то уж и просто. Большинству из нас знакомы эмпирические правила: необходимо выбирать сплюснутые камни с гладкой поверхностью, бросать их как можно сильнее под малым углом к поверхности воды, при этом слегка закручивая. В данной задаче попробуем разобраться, какие параметры и как влияют на количество отскоков камня.

Часть 1. Отскок от земли.

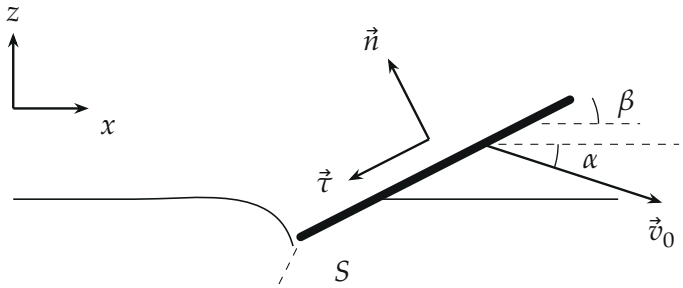
Для начала рассмотрим отражение камня от поверхности земли. Камень дискообразной формы падает плашмя на поверхность земли. Скорость камня в начальный момент удара v_0 направлена под углом α к горизонту. Коэффициент трения μ. Удар абсолютно упругий (проекция скорости на вертикальную ось поменяет свой знак). Действием силы тяжести за время удара в данной части можно пренебречь.



1.1. Найдите угол β, а также скорость камня v после удара.

Часть 2. Отскок от воды.

Камень массы M падает на поверхность воды со скоростью v_0, направленной под углом $\alpha \ll 1$ к горизонту. Угол между поверхностью камня и горизонтом равен $\beta \ll 1$ (см. рис.).



Точное описание соударения камня о воду требует нахождения течений, возникающих в процессе удара, путём решения уравнения Навье–Стокса. Данная задача является достаточно трудной и может быть решена лишь численными методами. Рассмотрим упрощённую модель взаимодействия камня с водой:

– при ударе на камень (если он не погрузился в воду полностью) действует сила вязкого трения, которая определяется выражением

$$\vec{F}_{\text{в}} = C_n \rho v^2 S\, \vec{n} + C_\tau \rho v^2 S\, \vec{\tau},$$

где ρ — плотность воды, v — модуль скорости камня, S — площадь погружённой части камня, C_n и C_τ — безразмерные коэффициенты, имеющие одинаковый порядок величины и зависящие от углов α и β, $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ — единичные векторы, указанные на рисунке;

– в процессе соударения скорость камня и угол α меняются незначительно, а угол β не меняется вовсе;

– в силу последнего приближения величины C_n и C_τ постоянны в процессе удара;

– начала отсчёта Oz и Ox выберем в месте, где камень начинает соприкасаться с водой;

– в силу наличия набегающих волн, обтекающих камень при ударе, будем считать, что площадь погружённой части камня линейно зависит от глубины погружения: $S = a\,|z|$, величину a считайте известной.

2.1. Запишите уравнение движения камня в проекции на оси X и Z. Упростите данные уравнения с учётом указанных приближений.

2.2. Покажите, что в любой момент времени проекции силы сопротивления воды связаны соотношением $F_{\text{вх}} = -\mu F_{\text{вz}}$. Получите выражение

для коэффициента μ.

2.3. Найдите зависимость координаты нижней точки камня от времени $z(t)$.

2.4. Найдите время соударения камня с водой t_0.

Пусть масса камня $M = 0{,}1$ кг, скорость перед ударом $v_0 = 10$ м/с, углы $\alpha = \beta = 10°$; для данных углов и формы камня $a = 60$ см, площадь поверхности камня $S_0 = 100$ см^2 (вся поверхность), коэффициенты $C_n = C_\tau = 0{,}5$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

2.5. Для указанных параметров вычислите время соударения t_0 и расстояние l_0, пройденное камнем вдоль оси X за время соударения.

2.6. Найдите среднюю проекцию равнодействующей силы, действующей на камень, на ось X $\langle F_x \rangle$.

2.7. Отскочит ли камень при указанных параметрах? Если да, то с какой конечной скоростью и под каким углом к горизонту?

2.8. Можно ли в данной модели воду считать твёрдым телом?

Подсказка. $\langle \sin\varphi \rangle_{\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]} = \dfrac{2}{\pi}$.

▲ **Решение. Что происходит.** В части 1 удар короткий: сила тяжести в нём не решает, скорость меняют нормальная реакция и трение скольжения μN. Их импульсы связаны константой μ, поэтому горизонтальный импульс выражается через вертикальный, а вертикальный известен из упругости удара. В части 2 сила воды пропорциональна глубине ($S = a|z|$) и направлена вверх: это возвращающая сила, камень в воде совершает половину гармонического колебания и выходит. Её составляющая вдоль x тормозит камень, и связь составляющих — тот же коэффициент μ, что у трения о твёрдую поверхность.

Обозначения. Ось x — по горизонтали вдоль движения, y (часть 1) и z (часть 2) — вертикально вверх; δt — длительность удара.

Часть 1.

1.1. Воспользуемся законом изменения импульса камня при ударе: изменение импульса равно импульсу действующих сил. Силой тяжести за время удара пренебрегаем. На камень действуют нормальная реакция $\vec{N}$ (вертикально вверх) и трение скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (горизонтально, против движения по x).

По вертикали (ось y): камень падал со скоростью $v_0 \sin\alpha$ вниз, после упругого удара вертикальная проекция сменила знак на $+v_0 \sin\alpha$. Сила N меняется за время удара, поэтому берём её импульс $\int N\,dt \equiv N\delta t$:

$$m(v_0 \sin\alpha - (-v_0 \sin\alpha)) = N\delta t \quad \Rightarrow \quad N\delta t = 2mv_0 \sin\alpha.$$

По горизонтали (ось x): камень скользит всё время удара, значит $F_{\text{тр}} = \mu N$ и направлена против x. Импульс трения равен $\mu N\delta t$:

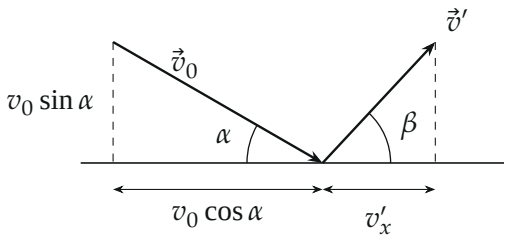
$$m(v'_x - v_0 \cos\alpha) = -\mu N\delta t = -2\mu m v_0 \sin\alpha,$$

$$v'_x = v_0(\cos\alpha - 2\mu \sin\alpha).$$

Вертикальная составляющая после удара $v'_y = v_0 \sin\alpha$. Итак,

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = v_0\sqrt{1 - 4\mu \sin\alpha \cos\alpha + 4\mu^2 \sin^2\alpha},$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{v'_y}{v'_x} = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 2\mu \operatorname{tg}\alpha}.$$



Скорости до и после удара ($\mu = 0{,}4$ для наглядности). Вертикальная составляющая не изменилась по модулю, горизонтальная уменьшилась на $2\mu v_0 \sin\alpha$.

Обратите внимание. Формулы верны, пока $v'_x \geq 0$, то есть $\mu \leq \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. Если $\mu > \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$, то горизонтальная скорость камня обращается в нуль раньше конца удара, скольжение прекращается, и сила трения исчезает

(трение не может развернуть камень). Тогда $v'_x = 0$, камень отскакивает вертикально: $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $v' = v_0 \sin\alpha$.

Часть 2.

2.1. Запишем второй закон Ньютона для камня в проекциях на оси. Единичные векторы по рисунку (при β у плоскости камня): $\vec{n} = (-\sin\beta, \cos\beta)$, $\vec{\tau} = (-\cos\beta, -\sin\beta)$. Сила вязкого трения в проекциях:

$$F_{вx} = -\rho v^2 S\,(C_n \sin\beta + C_\tau \cos\beta), \qquad F_{вz} = \rho v^2 S\,(C_n \cos\beta - C_\tau \sin\beta).$$

Обозначим $C_x = C_n \sin\beta + C_\tau \cos\beta$, $C_z = C_n \cos\beta - C_\tau \sin\beta$. Тогда

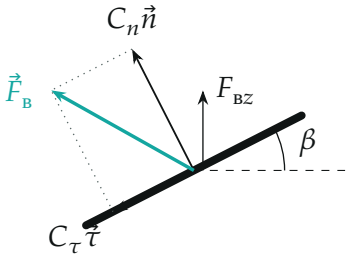
$$Ma_x = -\rho C_x v^2 S, \qquad Ma_z = -Mg + \rho C_z v^2 S.$$

Теперь используем приближения условия: $v \approx v_0$, C_n, C_τ (а значит C_x, C_z) постоянны, $S = a|z| = -az$ (в воде $z < 0$):

$$a_x = \frac{\rho C_x v_0^2 a}{M} z, \qquad a_z = -g - \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M} z.$$

Обозначим $\omega_0^2 = \dfrac{\rho C_z v_0^2 a}{M}$. Уравнение по z — уравнение гармонических колебаний со смещённым положением равновесия:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = -g.$$



Сила вязкого трения как сумма двух слагаемых (в единицах $\rho v^2 S$). Проекции на оси: $F_{вz} > 0$ вверх, $F_{вx} < 0$ назад.

2.2. Подставим $S = a|z|$ в проекции из п. 2.1: обе пропорциональны одному множителю $\rho v^2 S$:

$$F_{вx} = -\rho v^2 S\, C_x, \qquad F_{вz} = \rho v^2 S\, C_z \quad \Rightarrow \quad F_{вx} = -\frac{C_x}{C_z} F_{вz} = -\mu F_{вz}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{C_x}{C_z} = \frac{C_n \sin\beta + C_\tau \cos\beta}{C_n \cos\beta - C_\tau \sin\beta} = \operatorname{tg}(\beta + \theta), \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{C_\tau}{C_n}.$$

Равенство верно в любой момент, и от глубины не зависит: сила воды всегда направлена под одним углом $\beta + \theta$ к вертикали — как реакция твёрдой поверхности, у которой трение скольжения даёт тот же угол с нормалью.

2.3. Ищем решение уравнения $\ddot{z} + \omega_0^2 z = -g$ в виде $z = z_0 + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Подстановка даёт $\omega_0^2 z_0 = -g$, то есть $z_0 = -\dfrac{g}{\omega_0^2}$ — новое положение равновесия (сила воды уравновешивает вес). Начальные условия: камень касается воды, $z(0) = 0$, и движется вниз: $\dot{z}(0) = -v_0 \sin\alpha$:

$$A\cos\varphi = \frac{g}{\omega_0^2}, \qquad A\omega_0 \sin\varphi = v_0 \sin\alpha \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega_0 v_0 \sin\alpha}{g},$$

$$A = \frac{g}{\omega_0^2}\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}}.$$

Итак,

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2}\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}}\;\cos\Big(\omega_0 t + \operatorname{arctg}\frac{\omega_0 v_0 \sin\alpha}{g}\Big).$$

2.4. Камень выходит из воды, когда нижняя точка снова на уровне $z = 0$. Косинус принимает то же значение $\cos\varphi$ при фазе $2\pi - \varphi$ (первый

раз после начала), поэтому

$$\omega_0 t_0 + \varphi = 2\pi - \varphi \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_0}.$$

При $g \to 0$ получается $\varphi \to \dfrac{\pi}{2}$, $t_0 = \dfrac{\pi}{\omega_0}$ — ровно половина периода.

2.5. Числа. $C_x = 0{,}5(\sin 10^\circ + \cos 10^\circ) = 0{,}579$, $C_z = 0{,}5(\cos 10^\circ - \sin 10^\circ) = 0{,}406$. Далее

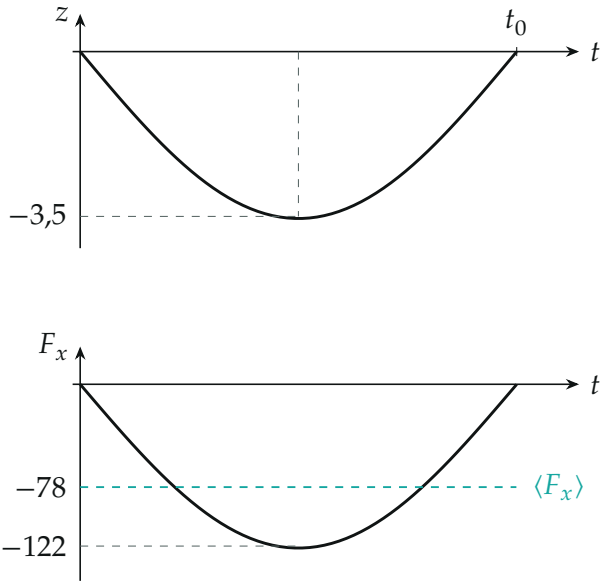
$$\omega_0^2 = \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M} = \frac{1000 \cdot 0{,}406 \cdot 100 \cdot 0{,}6}{0{,}1} \approx 2{,}43 \cdot 10^5 \text{ с}^{-2},$$

$\omega_0 \approx 493 \text{ с}^{-1}$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{493 \cdot 10 \cdot 0{,}1736}{10} \approx 85{,}7$, $\varphi \approx 89{,}3^\circ$. Фаза почти $\dfrac{\pi}{2}$: $z_0 = -0{,}04$ мм, $A \approx 3{,}52$ мм, $z_0 \ll A$, и камень проводит в воде почти половину периода:

$$t_0 = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{\omega_0} \approx 6{,}4 \text{ мс},$$

$$l_0 \approx v_0 \cos\alpha \cdot t_0 \approx 9{,}85 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-3} \approx 6{,}3 \text{ см}.$$

Здесь скорость вдоль x считаем почти постоянной (так же, как в условии про $v \approx v_0$).



Глубина погружения $z(t)$ в мм и сила $F_x(t)$ в Н за время удара $t_0 \approx 6{,}4$ мс: оба графика — полупериод синусоиды. Пунктиром — среднее значение $\langle F_x \rangle$.

2.6. Из п. 2.1 и п. 2.2: $F_x = M\omega_0^2 \mu z$. В воде $z \approx -A \sin \omega_0 t$ (так как $\varphi \approx 90°$ и $z_0 \ll A$) на интервале от 0 до π/ω_0, то есть фаза $\omega_0 t$ пробегает от 0 до π. Среднее значение sin на полупериоде $[0, \pi]$ равно $\dfrac{2}{\pi}$ (как и на $[0, \pi/2]$ — подсказка в условии):

$$\langle F_x \rangle = -M\omega_0^2 \mu A \cdot \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi}\, \mu M g \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}}.$$

Подставим: $\mu = \dfrac{0{,}579}{0{,}406} = 1{,}43$, $\sqrt{1 + (\omega_0 v_0 \sin\alpha / g)^2} \approx 85{,}7$:

$$\langle F_x \rangle \approx -\frac{2}{\pi} \cdot 1{,}43 \cdot 0{,}1 \cdot 10 \cdot 85{,}7 \approx -78 \text{ Н}.$$

2.7. Камень не отскочит в двух случаях: он целиком уйдёт под воду (тогда модель с $S = a|z|$ перестаёт работать), или вся его горизонтальная

скорость будет потеряна. Проверим оба:

$$S_{\max} = a|z_{\min}| < S_0, \quad |z_{\min}| \approx 3{,}5 \text{ мм} \ll \frac{S_0}{a} = \frac{100 \text{ см}^2}{60 \text{ см}} = 1{,}7 \text{ см};$$

$$|\langle F_x \rangle| t_0 \approx 78 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-3} = 0{,}50 \text{ кг} \cdot \text{м/с} < Mv_0 \cos\alpha = 0{,}98 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Оба условия выполнены, камень отскакивает. Изменение импульса по x равно импульсу силы:

$$v'_x = \frac{Mv_0 \cos\alpha + \langle F_x \rangle t_0}{M} \approx \frac{0{,}98 - 0{,}50}{0{,}1} \approx 4{,}9 \text{ м/с}.$$

Вертикальная составляющая на выходе по модулю прежняя (фаза $2\pi - \varphi$ симметрична началу): $v'_z = v_0 \sin\alpha = 1{,}74$ м/с вверх. Тогда

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_z} \approx 5{,}2 \text{ м/с},$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{v'_z}{v'_x} \approx 20^\circ.$$

2.8. Если бы вода была твёрдой поверхностью с трением $\mu = C_x/C_z \approx 1{,}43$ (из п. 2.2), то по формулам части 1 получили бы

$$v'_x = v_0(\cos\alpha - 2\mu \sin\alpha) \approx 4{,}9 \text{ м/с}, \qquad v' \approx 5{,}2 \text{ м/с},$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - 2\mu \operatorname{tg}\alpha} \approx 20^\circ.$$

Результаты совпали с п. 2.7: да, в рамках модели вода действует как твёрдое тело с трением μ. Причина понятна из п. 2.2: $F_{\text{вх}} = -\mu F_{\text{вz}}$ в каждый момент, поэтому импульс по x равен $-\mu$, умноженному на импульс по z, как у трения скольжения, а вертикальный импульс определён только изменением v_z (с точностью до малой добавки Mgt_0).

Проверка. Размерность: $\omega_0^2 \sim \dfrac{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \text{с}^{-2}$. Второй способ для п. 2.6: импульс силы по x равен $-\mu \int F_{\text{вz}}\, dt = -\mu\,(2Mv_0 \sin\alpha + Mgt_0) \approx -0{,}51$ кг·м/с (импульс воды по z — это изменение импульса

камня $2Mv_0 \sin\alpha$ плюс импульс веса Mgt_0), то есть $\langle F_x\rangle \approx -79$ Н — совпало с -78 Н. Прямое численное интегрирование уравнений модели даёт $t_0 = 6{,}42$ мс, $z_{\min} = -3{,}56$ мм, $v' \approx 5{,}1$ м/с, $\gamma \approx 20°$. Смысл: блинчик получится, пока горизонтальный импульс, потерянный в воде, меньше имеющегося — отсюда «бросать сильнее и под малым углом».

Ответ. 1) $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-2\mu\operatorname{tg}\alpha}$, $v' = v_0\sqrt{1-4\mu\sin\alpha\cos\alpha+4\mu^2\sin^2\alpha}$; при $\mu > \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$: $\beta = 90°$, $v' = v_0\sin\alpha$;

2.2) $\mu = \dfrac{C_n\sin\beta + C_\tau\cos\beta}{C_n\cos\beta - C_\tau\sin\beta}$;

2.3) $z(t) = -\dfrac{g}{\omega_0^2} + A\cos(\omega_0 t+\varphi)$, $\omega_0^2 = \dfrac{\rho C_z v_0^2 a}{M}$, $C_z = C_n\cos\beta - C_\tau\sin\beta$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega_0 v_0\sin\alpha}{g}$, $A = \dfrac{g}{\omega_0^2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$;

2.4) $t_0 = \dfrac{2\pi - 2\varphi}{\omega_0}$;

2.5) $t_0 \approx 6{,}4$ мс, $l_0 \approx 6{,}3$ см;

2.6) $\langle F_x\rangle \approx -78$ Н;

2.7) да, отскочит: $v' \approx 5{,}2$ м/с, $\gamma \approx 20°$;

2.8) да, вода в модели эквивалентна твёрдой поверхности с трением $\mu \approx 1{,}43$.