# Неоднородная разминка

**Задача 1.** [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/22, 9 класс, задача 1] **Неоднородная разминка.** Задание состоит из 3 не связанных между собой задач. Развитие технологий (в том числе нанотехнологий) привело к созданию материалов с необычными свойствами, часто их называют метаматериалы. Описанию некоторых таких материалов и посвящено данное задание.

**Задача 1.1.** Тонкий стержень длины $l$ изготовлен из материала, плотность которого изменяется по линейному закону от значения $\rho_1$ на одном конце до $\rho_2$ на другом.

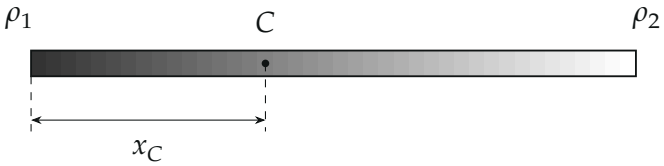



*Рисунок условия 1.1: стержень, у которого левый конец плотнее правого; $C$ — центр масс.*

**1.1** Определите координату центра масс такого стержня.

**Задача 1.2.** Тонкий проводящий стержень длины $l$ изготовлен из материала, удельное сопротивление которого изменяется по линейному закону от значения $\rho_1 = 0$ на одном конце до $\rho_2 = \rho_0$ на другом. Стержень подключен к источнику постоянного напряжения $U_0$. Одна клемма вольтметра подключена к концу стержня, вторая — к точке на стержне, находящейся на расстоянии $x$.

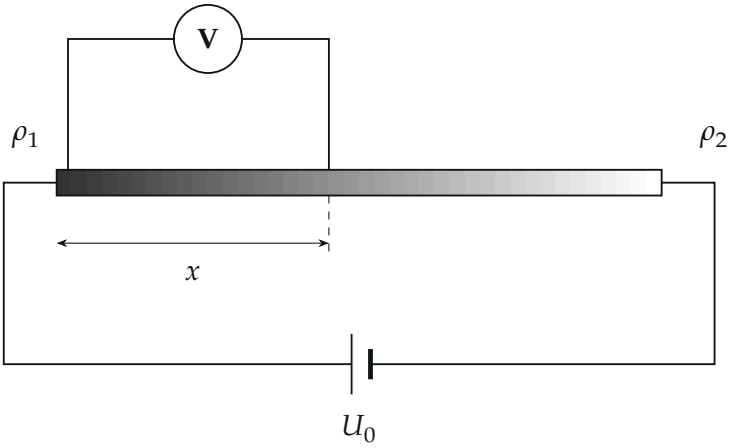



*Рисунок условия 1.2: схема подключения стержня и вольтметра.*

**1.2** Найдите зависимость показаний вольтметра от координаты точки подключения второй клеммы вольтметра $U(x)$.

**Задача 1.3.** Два одинаковых бруска изготовлены из материала, удельная теплоёмкость которого линейно зависит от температуры. При температуре $t_1 = 10{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ удельная теплоёмкость равна $c_0$, а при температуре $t_2 = 20{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ она становится равной $2c_0$. Первый брусок находится при температуре $t_1$, а второй — при температуре $t_2$. Бруски приводят в тепловой контакт.

**1.3** Пренебрегая потерями теплоты в окружающую среду, рассчитайте температуру брусков после установления теплового равновесия между ними.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Во всех трёх задачах «неоднородное» свойство меняется вдоль оси по прямой. Тогда нужная величина (масса, сопротивление, теплота) — это *площадь под графиком* этого свойства: разбиваем стержень или интервал температур на тонкие полоски, у каждой площадь равна высоте на ширину, а полосок много. Площадь трапеции и треугольника считать умеем, поэтому интегрирования не нужно.

**Обозначения.** $x$ — координата вдоль стержня от его левого конца, на котором $\rho = \rho_1$; $\rho(x)$ — плотность (удельное сопротивление) в точке $x$; $S$ — площадь сечения стержня, постоянная; $x_C$ — координата центра масс; $t$ — температура в градусах Цельсия.

**Задача 1.1.**

**1. Плотность по длине.** Плотность линейна по $x$ и меняется от $\rho_1$ до $\rho_2$ на длине $l$, поэтому

$$\rho(x) = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1)\frac{x}{l}.$$

Тонкий участок длины $\Delta x$ имеет массу $\Delta m = \rho(x) S\,\Delta x$ — она пропорциональна площади узкой полоски шириной $\Delta x$ под графиком $\rho(x)$.

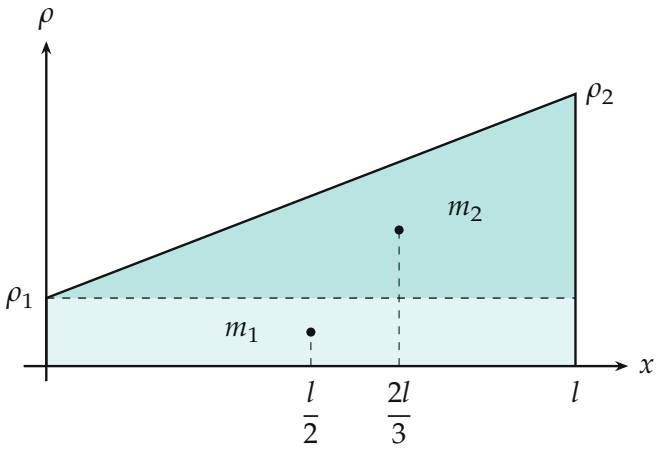



*График плотности. Бледная часть — «прямоугольник» массы $m_1$, тёмная — «треугольник» массы $m_2$; точки — их центры масс.*

**2. Две части.** Разобьём трапецию на прямоугольник высотой $\rho_1$ и прямоугольный треугольник с катетами $l$ и $\rho_2 - \rho_1$. Массы частей (в единицах $S$): прямоугольник $m_1 = \rho_1 l\,S$, треугольник $m_2 = \dfrac{(\rho_2 - \rho_1)\,l}{2}S$. Центр масс прямоугольника лежит в его середине, $x_1 = \dfrac{l}{2}$. Центр масс треугольника лежит на трети его высоты от вертикального катета — в нашем треугольнике вертикальный катет стоит на правом краю, поэтому от левого конца $x_2 = \dfrac{2l}{3}$.

**3. Центр масс стержня** — взвешенное среднее координат центров

масс частей (центр масс системы тел):

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_1 \frac{l}{2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \cdot \frac{2l}{3}}{\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}} = \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{3(\rho_1 + \rho_2)}\, l.$$

**Обратите внимание.** Центр масс треугольника — на $\frac{1}{3}$ высоты от *основания*. Основание здесь — вертикальный катет, он на правом краю, поэтому от левого конца получается $\frac{2l}{3}$, а не $\frac{l}{3}$. Ошибка в этом месте перепутала бы $\rho_1$ и $\rho_2$ в ответе.

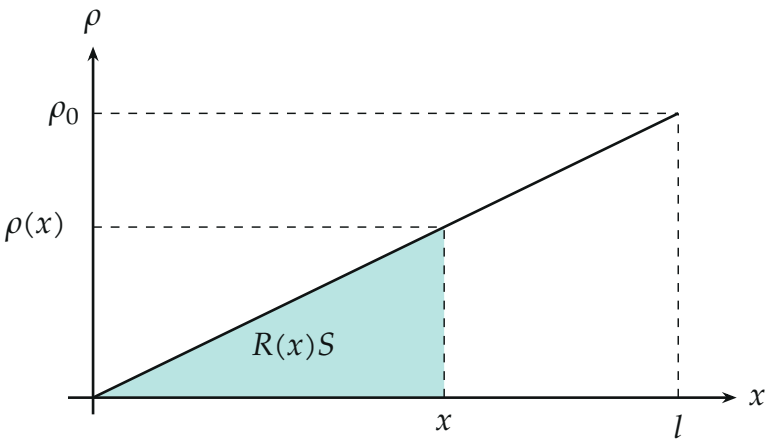
**Проверка.** При $\rho_1 = \rho_2$ получаем $x_C = \frac{l}{2}$ — однородный стержень. При $\rho_1 = 0$ (масса нарастает к правому концу, как у клина) $x_C = \frac{2l}{3}$ — центр смещён к тяжёлому концу, как у треугольника. При $\rho_2 = 0$ имеем $x_C = \frac{l}{3}$. На рисунке условия левый конец темнее (плотнее), и $C$ левее середины, что согласуется с формулой при $\rho_1 > \rho_2$.

**Задача 1.2.**

**4. Сопротивление участка.** Удельное сопротивление растёт от нуля до $\rho_0$:

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{l}.$$

Сопротивление тонкого участка длины $\Delta x$ равно $\Delta R = \rho(x)\frac{\Delta x}{S}$ — опять площадь узкой полоски под графиком $\rho(x)$, делённая на $S$. Все участки соединены последовательно, поэтому сопротивление участка от 0 до $x$ равно площади треугольника под графиком, делённой на $S$.




*Удельное сопротивление: площадь закрашенного треугольника, делённая на $S$, равна сопротивлению участка от $0$ до $x$.*

**5. Сопротивление участка и всего стержня.** Площадь треугольника с основанием $x$ и высотой $\rho_0\dfrac{x}{l}$ равна $\dfrac{1}{2}x\cdot\rho_0\dfrac{x}{l}$, поэтому

$$R(x)=\frac{\rho_0 x^2}{2lS},\qquad R_0=R(l)=\frac{\rho_0 l}{2S}.$$

**6. Ток.** Через стержень идёт один и тот же ток (закон Ома для участка цепи — весь стержень подключён к источнику; вольтметр считаем идеальным, он ток не берёт):

$$I=\frac{U_0}{R_0}=\frac{2SU_0}{\rho_0 l}.$$

**7. Показание вольтметра.** Вольтметр подключён к концам участка длиной $x$, значит, показывает напряжение на нём. Закон Ома для этого участка:

$$U(x)=IR(x)=\frac{2SU_0}{\rho_0 l}\cdot\frac{\rho_0 x^2}{2lS}=U_0\frac{x^2}{l^2}.$$

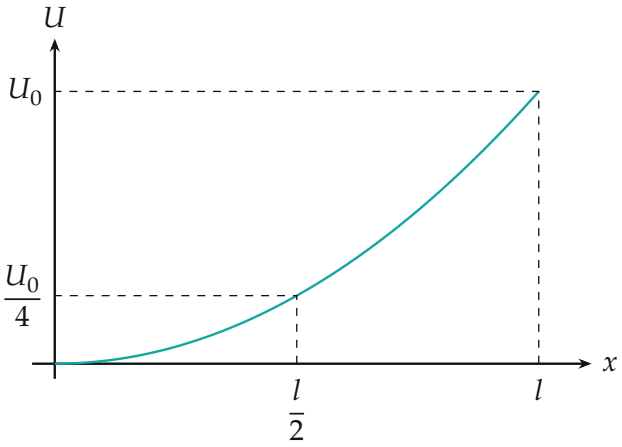



*График $U(x)$: парабола; на середине стержня напряжение лишь $\frac{1}{4}U_0$.*

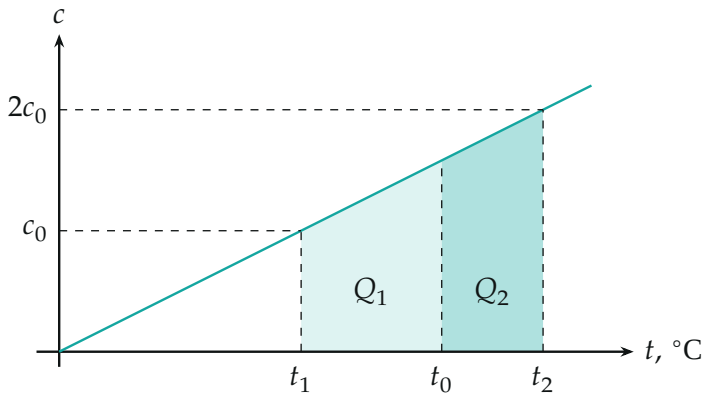
**Проверка.** $U(0) = 0$ — клеммы вольтметра в одной точке; $U(l) = U_0$ — вольтметр на всём стержне показывает напряжение источника. Размерность: $x^2/l^2$ безразмерно, итог — вольты. Левая половина стержня (с малым $\rho$) забирает лишь четверть напряжения, поэтому график полог у начала и крут у правого конца: там сопротивление на единицу длины больше.

**Задача 1.3.**

**8. Теплоёмкость как функция температуры.** Прямая проходит через точки $(t_1, c_0)$ и $(t_2, 2c_0)$, а $t_2 = 2t_1$, поэтому она проходит и через начало отсчёта температур:

$$c(t) = c_0 \frac{t}{t_1}.$$

Чтобы нагреть брусок массой $m$ на малый интервал $\Delta t$, нужно $\Delta Q = mc(t)\,\Delta t$ — это масса, умноженная на площадь узкой полоски под графиком $c(t)$.




*Теплоёмкость $c(t)$. Площадь светлой части (нагрев холодного бруска от $t_1$ до $t_0$) равна площади тёмной (остывание горячего от $t_2$ до $t_0$).*

**9. Площадь под графиком.** Площадь под прямой $c = c_0 t/t_1$ от нуля до температуры $t$ — треугольник: $\frac{1}{2} t \cdot c_0 \frac{t}{t_1} = \frac{c_0 t^2}{2t_1}$. Поэтому тепло, нужное для нагрева от $t_a$ до $t_b$, пропорционально разности квадратов:

$$Q = \frac{mc_0}{2t_1}(t_b^2 - t_a^2).$$

**10. Уравнение теплового баланса.** Потерь нет и массы одинаковы, поэтому тепло, отданное горячим бруском при остывании от $t_2$ до $t_0$, равно теплу, полученному холодным при нагреве от $t_1$ до $t_0$ ($t_0$ — общая конечная температура):

$$t_2^2 - t_0^2 = t_0^2 - t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{100 + 400}{2}}\,^\circ\text{C} \approx 15{,}8\,^\circ\text{C}.$$

**Обратите внимание.** Ответ не среднее арифметическое 15 °C: у горячего бруска теплоёмкость больше, поэтому он остывает «неохотно», а холодный нагревается быстрее, и общая температура ближе к $t_2$.

**Проверка.** Холодный получил $\frac{mc_0}{20}(250 - 100) = 7{,}5\,mc_0 \cdot {}^\circ\text{C}$, горячий отдал $\frac{mc_0}{20}(400 - 250) = 7{,}5\,mc_0 \cdot {}^\circ\text{C}$ — поровну. $t_1 < t_0 < t_2$. Если

бы теплоёмкость была постоянной, получилось бы 15 °C; рост теплоёмкости с температурой сдвигает ответ к горячему.

**Смысл.** При линейной зависимости центр масс, сопротивление и теплота сводятся к площадям трапеции и треугольника, интегралы не нужны.

**Ответ.** 1.1) $x_C = \dfrac{\rho_1 + 2\rho_2}{3(\rho_1 + \rho_2)}\, l$ от конца, где плотность $\rho_1$; 1.2) $U(x) = U_0 \dfrac{x^2}{l^2}$; 1.3) $t_0 = \sqrt{\dfrac{t_1^2 + t_2^2}{2}} \approx 15{,}8\,^\circ\text{C}$.