Земная невесомость

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/22, 9 класс, задача 2] **Земная невесомость.** Для создания «кратковременной невесомости» в земных условиях (например, для тренировки космонавтов) можно использовать богатые возможности современной науки и техники: от лифта до самолёта (Рис. 1). Рассмотрим некоторые из них.



Силой сопротивления воздуха в первой части данной задачи можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2.

Часть 1. «Идеальная» невесомость. В этой части задачи будем считать, что сила сопротивления воздуха мала, и ей можно пренебречь. Рассмотрим лифт, который может двигаться с любым ускорением a_1 по вертикальной шахте (как вверх, так и вниз!).

1.1 В каком направлении и с каким ускорением a_1 необходимо двигать лифт, чтобы его пассажиры испытали кратковременную невесомость?

Для создания «кратковременной невесомости» при тренировках космонавтов в земных условиях используются полёты авиации по некоторой траектории с «приглушёнными» двигателями.

1.2 Покажите, что эта траектория является параболой.

Пусть самолёт, находясь в точке A и имея скорость $v_0 = 650$ км/ч, направленную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, «выключает» двигатели и переходит на параболическую траекторию ABC (см. Рис. 2).

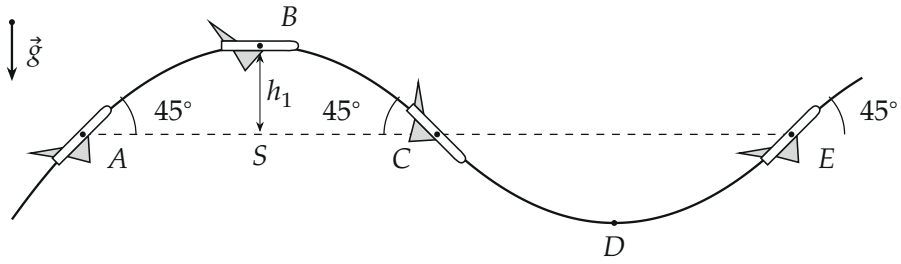


Рис. 2. Траектория: параболы ABC (вершина B) и CDE (вершина D).

1.3 Найдите промежуток времени $t_н$, в течение которого пассажиры (и экипаж!) будут испытывать невесомость.

1.4 Определите скорость v_1 самолёта в верхней точке B траектории (см. Рис. 2).

1.5 Вычислите максимальную высоту h_1 и дальность полёта $S = |AC|$ самолёта по горизонтали (см. Рис. 2).

1.6 В точке C траектории пилоты переводят машину на «симметричную» параболу CDE (см. Рис. 2), ветви которой направлены вверх. Чему равна перегрузка $\eta = \dfrac{a_2}{g}$ пассажиров в нижней точке D траектории, где a_2 — модуль ускорения самолёта в точке D?

Часть 2. «Реальная» невесомость. В этой части задачи будем учитывать силу сопротивления воздуха F_c и будем считать, что она пропорциональна квадрату скорости самолёта: $F_c = -\beta v^2$, где β — некоторый постоянный коэффициент. Пилоты по-прежнему стараются реализовать состояние невесомости на борту самолёта.

2.1 Найдите зависимость мощности двигателя $P_0(t)$ от времени на участке ABC траектории.

2.2 При движении вблизи точки C пересечения верхней и нижней парабол (т.е. практически «по прямой») пассажиры испытывают резкий толчок. С чем, по вашему мнению, связано данное явление?

▲ **Решение. Что происходит.** Невесомость — это не отсутствие силы тяжести, а состояние, когда опора ничего не давит на тело: и тело, и опора (лифт, самолёт) падают с одинаковым ускорением g. Поэтому самолёт летит по траектории камня, брошенного под углом: это парабола.

Далее всё — задача о броске под углом к горизонту, а в части 2 — ещё и баланс мощности при сопротивлении воздуха.

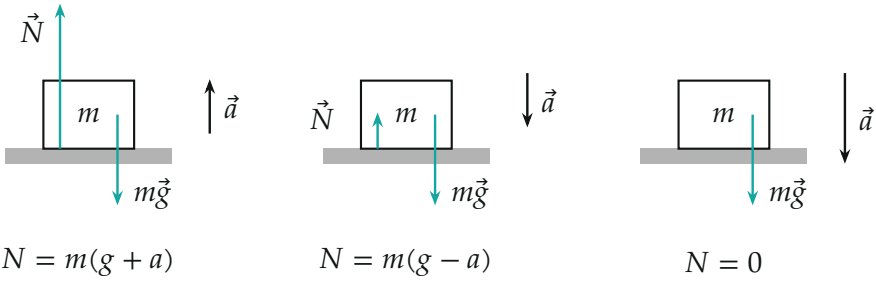
Обозначения. $\vec{g}$ — ускорение свободного падения (вниз); $v_0 = 650$ км/ч $= 180{,}6$ м/с; $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ — составляющие начальной скорости ($v_{0x} = v_{0y} = 127{,}7$ м/с при $\alpha = 45°$); m — масса тела (или самолёта); N — сила реакции опоры; R — радиус кривизны траектории.

Часть 1.

1.1. Лифт. Вес — сила, с которой тело давит на опору; по третьему закону Ньютона он равен силе реакции опоры N. Запишем второй закон Ньютона для бруска массой m на полу лифта в проекции на ось, направленную вверх (ускорение лифта a_{1y} может быть любого знака):

$$N - mg = ma_{1y} \quad \Rightarrow \quad N = m(g + a_{1y}).$$

Невесомость — это $N = 0$, то есть $a_{1y} = -g$: ускорение направлено вниз и равно g.



Брусок на полу лифта. Слева ускорение вверх — реакция опоры больше mg; в центре ускорение вниз, меньше g — меньше mg; справа лифт падает с ускорением g — опора ничего не давит.

Лифт может при этом идти вверх с замедлением или вниз с ускорением — важно именно направление ускорения, а не скорости. Простейший вариант — свободное падение лифта.

1.2. Парабола. По 1.1 пассажиры невесомы, когда ускорение самолёта равно $\vec{g}$: на него действует только сила тяжести (тяга компенсирует

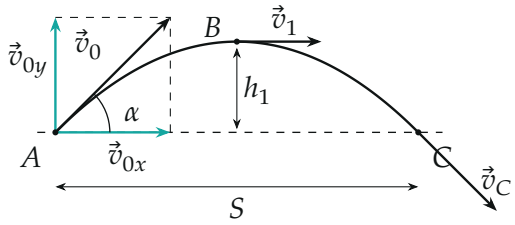
сопротивление воздуха — в части 1 его нет вовсе). Движение с постоянным ускорением $\vec{g}$ раскладываем по осям: горизонтально — равномерное, вертикально — равноускоренное:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t, \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Выразим $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ из первого и подставим во второе:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

Это уравнение параболы с ветвями вниз: невесомость возможна только на параболе.



Параболическая траектория ABC: в точке A скорость $\vec{v}_0$ разложена на горизонтальную и вертикальную составляющие; в верхней точке B скорость горизонтальна.

1.3. Время невесомости. Невесомость длится, пока самолёт летит по параболе от A до C — это время полёта камня, брошенного под углом α со скоростью v_0 и вернувшегося на ту же высоту. Вертикальная скорость меняет знак с $+v_{0y}$ на $-v_{0y}$ за время $t_н$ при ускорении g:

$$v_{0y} - gt_н = -v_{0y} \quad \Rightarrow \quad t_н = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 127{,}7}{9{,}81}\ \text{с} \approx 26{,}0\ \text{с}.$$

1.4. Скорость в верхней точке. В B вертикальная составляющая скорости равна нулю (самолёт перестал подниматься), а горизонтальная за

всё время не меняется, так как горизонтальной силы нет:

$$v_1 = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = 127{,}7 \text{ м/с} \approx 128 \text{ м/с } (460 \text{ км/ч}).$$

1.5. Высота и дальность. Подъём до верхней точки идёт с замедлением g от v_{0y} до нуля:

$$h_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{127{,}7^2}{2 \cdot 9{,}81} \text{ м} \approx 831 \text{ м}.$$

Дальность — горизонтальная скорость на время полёта:

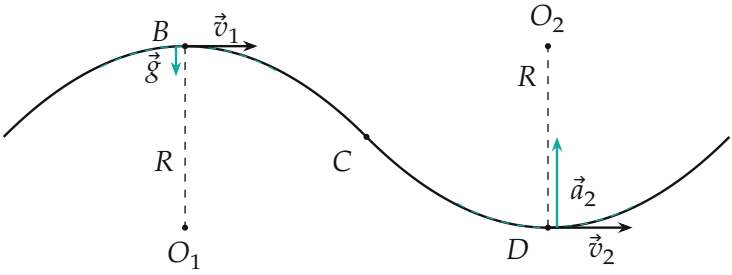
$$S = v_{0x} t_\text{н} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{180{,}6^2}{9{,}81} \text{ м} \approx 3{,}32 \text{ км}.$$

Обратите внимание. В официальном ответе $h_1 = 835$ м — это следствие округления скорости до 128 м/с; без промежуточного округления получается 831 м.

1.6. Перегрузка в нижней точке. Радиус кривизны находим из центростремительного ускорения. В верхней точке B скорость горизонтальна (v_1), а ускорение g направлено вниз, перпендикулярно скорости, то есть целиком центростремительное:

$$\frac{v_1^2}{R} = g \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v_1^2}{g} = \frac{127{,}7^2}{9{,}81} \text{ м} \approx 1660 \text{ м}.$$

Нижняя парабола CDE — зеркальное отражение верхней, поэтому в её вершине D радиус кривизны тот же, R, а скорость горизонтальна. Центр кривизны O_1 верхней дуги лежит под траекторией, центр O_2 нижней — над ней.



Дуги кривизны в B и D имеют радиус $R = v_1^2/g$; ускорение в B равно $\vec{g}$, а в D направлено к O_2 и втрое больше.

Скорость v_2 в точке D находим по закону сохранения механической энергии для самолёта за участок $C \to D$: в C скорость v_0 (в той же высоте, что и A), в D самолёт ниже на h_1; сопротивление не учитываем, подъёмная сила работы не совершает (перпендикулярна скорости):

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_1 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = v_0^2 + 2gh_1 = v_0^2(1 + \sin^2\alpha) = 1{,}5\,v_0^2.$$

В D скорость горизонтальна, а траектория — дуга радиуса R, поэтому полное ускорение целиком центростремительное (направлено вверх, к O_2):

$$a_2 = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_0^2(1+\sin^2\alpha)\,g}{v_0^2\cos^2\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\,g = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\,g = 3g.$$

Перегрузка

$$\eta = \frac{a_2}{g} = 3{,}00.$$

Обратите внимание. Перегрузка η здесь определена как отношение ускорения самолёта к g. Пассажир при этом прижат к креслу с силой $m(g + a_2) = 4mg$ — он чувствует вес четырёх своих масс: вес складывается из mg и ma_2 (в 1.1 для ускорения вверх было $N = m(g + a)$).

Проверка. Размерность: v^2/R — м/с^2. Второй способ: $v_2^2/v_1^2 = (v_0^2 + v_{0y}^2)/v_{0x}^2 = 1{,}5/0{,}5 = 3$, откуда $a_2 = 3g$ сразу. Для сравнения: в реальных полётах приборы показывают $\eta \approx 2$, так как реальная траектория в

нижней точке положе идеальной параболы; наша оценка того же порядка.

Часть 2.

2.1. Мощность двигателя. Невесомость требует, чтобы равнодействующая всех сил, кроме силы тяжести, была равна нулю. Значит, тяга двигателей $F_т$ в каждый момент точно компенсирует сопротивление F_c: она направлена вдоль скорости, а по модулю $F_т = \beta v^2$. Тогда траектория остаётся той же параболой, а мощность тяги — сила на скорость (тяга и скорость сонаправлены):

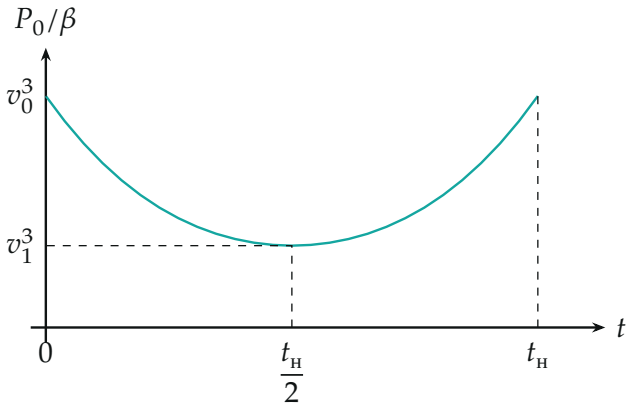
$$P_0 = F_т v = \beta v^3.$$

Скорость самолёта в момент t найдём из составляющих: горизонтальная v_{0x} постоянна, вертикальная $v_{0y} - gt$:

$$v(t) = \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin\alpha \cdot gt + g^2t^2}.$$

Отсюда

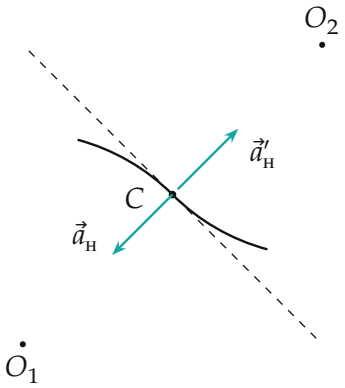
$$P_0(t) = \beta(v_0^2 - 2v_0 \sin\alpha \cdot gt + g^2t^2)^{3/2}, \qquad 0 \le t \le t_н.$$



Мощность двигателя в единицах $1/\beta$: минимум v_1^3 в верхней точке B, на концах v_0^3; кривая симметрична относительно $t_н/2$.

Проверка. Размерность: βv^3 — Н/(м/с)$^2\cdot$(м/с)^3 = Н·м/с — ватты. В точках A и C скорость одна и та же (v_0), поэтому и мощность $\beta v_0^3 \approx 5{,}9\cdot 10^6\beta$ одинакова; в верхней точке скорость наименьшая (v_1), мощность $\beta v_1^3 \approx 2{,}1\cdot 10^6\beta$ минимальна.

2.2. Толчок в точке C**.** В точке C верхняя и нижняя параболы имеют общую касательную и общую скорость, но противоположную кривизну: центр кривизны скачком переходит из O_1 (под траекторией) в O_2 (над ней). Ускорение g раскладывается на касательную составляющую $g\sin\alpha$ вдоль скорости и нормальную $g\cos\alpha$ поперёк неё; нормальная составляющая и есть центростремительное ускорение v_0^2/R_C (R_C — радиус кривизны в C, у зеркальных парабол он одинаков) — на обеих параболах оно равно $g\cos\alpha$ по модулю, но направление его меняется на противоположное.



Окрестность точки C: до неё самолёт движется по верхней параболе (центр кривизны O_1, нормальное ускорение к O_1), после — по нижней (центр O_2, нормальное ускорение к O_2). Касательная общая (штрих).

Проекцию ускорения на касательную даёт одна сила тяжести, она в C у обеих парабол одинакова: $g\sin\alpha$. А вот нормальная составляющая ускорения меняет знак. Ощущение невесомости в верхней параболе — это нулевая реакция кресла, а на нижней кресло должно создавать центростремительное ускорение $g\cos\alpha$ сверх компенсации нормальной составляющей силы тяжести: нормальная сила, действующая на пассажира, мгновенно вырастает от 0 до $2mg\cos\alpha \approx 1{,}4\,mg$. Резкое (за долю

секунды) нарастание нагрузки с нуля и есть «толчок». Похожее явление — «качание голов» пассажиров при смене поворота трамвая с левого на правый: центр кривизны перескакивает на другую сторону.

Смысл. Невесомость — свободное падение: траектория — парабола, ускорение равно g в любой её точке. Для «реальной» невесомости двигатель лишь компенсирует сопротивление. Переход верхней параболы в нижнюю даёт мгновенную смену направления кривизны, поэтому и возникает толчок.

Ответ. 1.1) лифт должен двигаться с ускорением $a_1 = g$, направленным вниз (падать с ускорением или подниматься с замедлением); 1.2) $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ — парабола; 1.3) $t_\text{н} = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} \approx 26{,}0$ с; 1.4) $v_1 = v_0\cos\alpha \approx 128$ м/с; 1.5) $h_1 \approx 831$ м, $S = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \approx 3{,}32$ км; 1.6) $\eta = 3{,}00$; 2.1) $P_0(t) = \beta(v_0^2 - 2v_0\sin\alpha\cdot gt + g^2t^2)^{3/2}$; 2.2) при переходе с верхней параболы на нижнюю центр кривизны переходит из O_1 в O_2, нормальное ускорение меняет направление, и нагрузка на пассажиров мгновенно растёт от 0 до $\approx 1{,}4\,mg$.