Три груза

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2021/22, 9 класс, задача 3] **Три груза.** Один конец жёсткого невесомого стержня шарнирно закреплён, к другому концу на перекинутой через невесомый блок нити подвешен груз массой m. Ещё два груза массами $20m$ и $12m$ подвешены на нитях к стержню в точках, делящих его на три равные части (см. рис.). Все нити невесомы и нерастяжимы. Стержень удерживают неподвижно в горизонтальном положении, а затем отпускают. Ускорение свободного падения равно g.

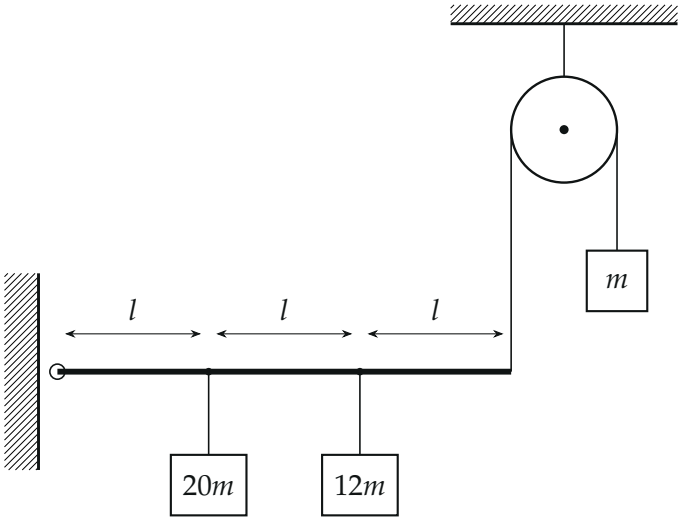


Рисунок условия: стержень на шарнире у стены, на нём в точках l, $2l$ висят грузы $20m$ и $12m$, а конец стержня привязан нитью через блок к грузу m.

1. Найдите ускорения всех трёх грузов сразу после отпускания стержня.

▲ **Решение. Что происходит.** Стержень невесомый, поэтому сумма моментов сил, действующих на него, всё время равна нулю (иначе при нулевой массе угловое ускорение было бы бесконечным). Грузы соединены со стержнем нитями, а нить умеет только тянуть, но не толкать. Поэтому сначала нужно выяснить, все ли три нити остаются натянутыми.

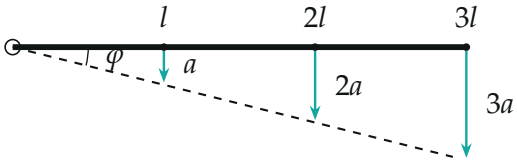
Решаем в два шага: предполагаем, что все натянуты; получаем противоречие для груза $12m$; убираем его из системы и решаем заново.

Обозначения. a — ускорение груза $20m$ (точки стержня на расстоянии l от шарнира); T_1, T_2, T_3 — силы натяжения нитей грузов $20m$, $12m$, m; ось для грузов $20m$ и $12m$ направлена вниз, для груза m — вверх (он поднимается).

1. Связь ускорений. Стержень жёсткий и в первый момент поворачивается вокруг шарнира: скорости ещё нулевые, поэтому все точки стержня ускоряются вертикально, и ускорение точки пропорционально её расстоянию до шарнира:

$$a_l : a_{2l} : a_{3l} = 1 : 2 : 3, \qquad a_l = a,\ a_{2l} = 2a,\ a_{3l} = 3a.$$

Нить груза m нерастяжима и перекинута через невесомый блок: когда конец стержня идёт вниз с ускорением $3a$, груз m идёт вверх с таким же по модулю ускорением $3a$.



Стержень чуть повернулся (штрих, угол φ сильно преувеличен): вертикальные смещения, а значит и ускорения, точек на расстояниях l, $2l$, $3l$ от шарнира относятся как $1 : 2 : 3$.

2. Предположение: все нити натянуты. Второй закон Ньютона для каждого груза в выбранных направлениях осей:

$$20ma = 20mg - T_1, \qquad 12m \cdot 2a = 12mg - T_2, \qquad m \cdot 3a = T_3 - mg.$$

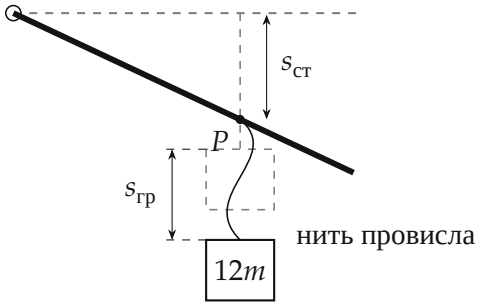
Невесомый стержень: сумма моментов относительно шарнира равна нулю. Нити грузов $20m$ и $12m$ тянут стержень вниз с плечами l и $2l$, нить груза m тянет вверх с плечом $3l$:

$$T_1 l + T_2 \cdot 2l = T_3 \cdot 3l.$$

Подставляя $T_1 = 20m(g-a)$, $T_2 = 12m(g-2a)$, $T_3 = m(g+3a)$, сокращая m и l:

$$20(g-a)+24(g-2a)=3(g+3a) \;\Rightarrow\; 41g=77a \;\Rightarrow\; a=\frac{41}{77}g.$$

3. Противоречие. Тогда $T_2 = 12m(g-2a) = 12mg\left(1-\frac{82}{77}\right) = -\frac{60}{77}mg < 0$, а ускорение груза $12m$ получилось $2a = \frac{82}{77}g > g$. Нить не может толкать груз вверх, и груз не может падать быстрее g под действием только силы тяжести и нити, которая тянет вверх. Значит, предположение неверно: нить второго груза ослабла, $T_2 = 0$, а груз $12m$ свободно падает с ускорением g.



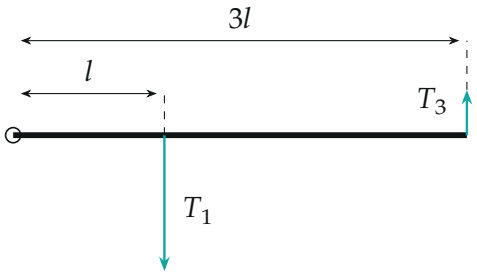
Малое время после отпускания. Серое — начальное положение, чёрное — через малое время τ: точка P стержня сместилась на $s_{ст} = \frac{34}{29}\cdot\frac{g\tau^2}{2}$, груз $12m$ упал лишь на $s_{гр} = \frac{g\tau^2}{2}$, и нить между ними провисла.

Это согласуется с тем, что нить действительно ослабла: точка стержня, к которой она привязана, уходит вниз быстрее ($2a = \frac{34}{29}g > g$), чем падает груз, и расстояние между точкой и грузом сокращается.

Обратите внимание. Груз не может падать быстрее g, пока на него действует только сила тяжести; ускорение больше g получается, только если нить тянет вниз, а нить так не умеет. Чтобы не ошибиться, всегда сначала проверяйте знак натяжения.

4. Система без второго груза. Теперь на стержень действуют нити только грузов $20m$ и m, а груз $12m$ лишь падает рядом:

$$20ma = 20mg - T_1, \qquad 3ma = T_3 - mg, \qquad T_1 l = T_3 \cdot 3l.$$

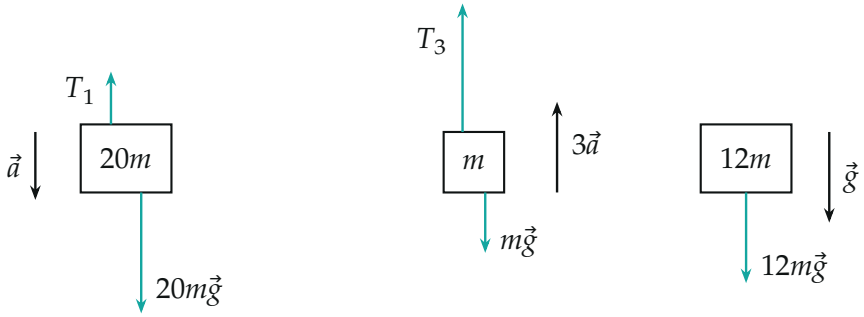


Силы, действующие на стержень (стрелки — действие нитей, длины приведены к моментам): момент $T_1 \cdot l$ уравновешивается моментом $T_3 \cdot 3l$.

Из третьего уравнения $T_1 = 3T_3$. Подставим $T_1 = 20m(g - a)$ и $T_3 = m(g + 3a)$:

$$20(g - a) = 3(g + 3a) \;\Rightarrow\; 17g = 29a \;\Rightarrow\; a = \frac{17}{29}g \approx 0{,}59\,g.$$

Тогда ускорение груза m — вверх, $3a = \dfrac{51}{29}g \approx 1{,}76\,g$; груз $12m$ падает с g. Натяжения: $T_1 = 20m(g - a) = \dfrac{240}{29}mg$, $T_3 = \dfrac{80}{29}mg$ — обе положительны, $T_1 = 3T_3$.



Силы, действующие на каждый груз: на $20m$ — сила тяжести и натяжение T_1; на m — T_3 и тяжесть; на $12m$ — только тяжесть, он падает свободно (длины стрелок условны).

Проверка. Второй способ — через мощность (энергию). В малое время после отпускания, когда скорость груза $20m$ равна v, скорость груза m равна $3v$ вверх. Мощность сил тяжести равна скорости изменения кинетической энергии системы (нити и шарнир работу не совершают):

$$20mg \cdot v - mg \cdot 3v = \frac{d}{dt}\,\frac{20mv^2 + m(3v)^2}{2} = 29m\,v\,a \;\Rightarrow\; a = \frac{17}{29}\,g,$$

то же значение. Размерность: ускорение, g умножено на безразмерное число. Предел: если бы груза m с блоком не было, груз $20m$ падал бы свободно, $a = g$; наличие противовеса даёт $a < g$, как и получилось.

Смысл. Для невесомого стержня ускорения грузов определяются моментами сил, а проверка знака натяжения решает, участвует ли груз в системе. Лишний груз, который «не успевает» за стержнем, просто падает свободно.

Ответ. Груз $20m$: $a_1 = \dfrac{17}{29}\,g \approx 0{,}59\,g$ вниз; груз $12m$: $a_2 = g$ вниз (свободное падение, нить ослабла); груз m: $a_3 = \dfrac{51}{29}\,g \approx 1{,}76\,g$ вверх.