Термоскоп Галилея

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 10 класс, задача 1] Первый термоскоп сконструировал итальянский физик Галилео Галилей примерно в 1592—1600 годах. Термоскоп (греч. Θέρμη [термо] «тепло» + σκοπέω [скопео] «смотрю») — устройство, которое показывает изменения температуры, родоначальник современных термометров. Типичная конструкция термоскопа представляет собой трубку, в которой жидкость поднимается и опускается при изменении температуры.

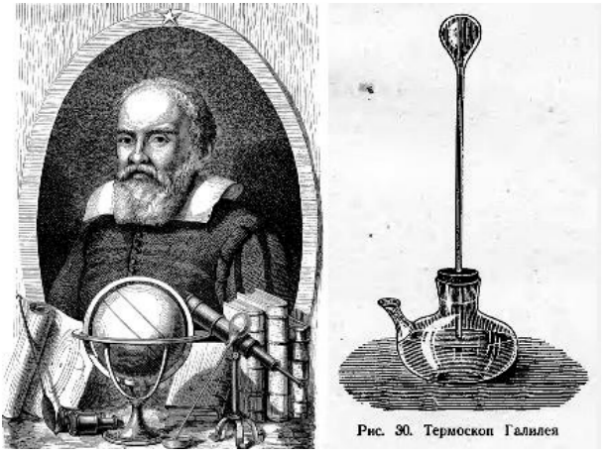

Рис. 30. Термоскоп Галилея

Молодой, но талантливый белорусский физик Фёдор, прочитав это сообщение, решил превзойти знаменитого итальянского учёного: не только самостоятельно сконструировать и изготовить подобный прибор, но и снабдить его точно рассчитанной температурной шкалой, тем более что Фёдор только что изучил газовые законы, ещё не известные во времена Г. Галилея.

Часть 1. Конструирование и градуировка в идеальном случае.

Фёдор нашёл стеклянную трубку, измерил её размеры: длина трубки $l = 50$ см; внутренний диаметр $d = 0{,}50$ см. Фёдор закрепил трубку вертикально, нижний конец трубки опустил в широкий сосуд с водой. Погружённой в воду частью трубки можно пренебречь, также можно считать, что уровень воды в нижнем сосуде постоянен.

К верхней части трубки прикрепил сосуд, объём которого V_1 Фёдор тщательно рассчитал. Рядом с трубкой располагается шкала, по которой можно измерять высоту h, на которую поднимается вода в трубке.

Для расчётов используйте следующие параметры: плотность воды $\rho = 1{,}00 \cdot 10^3$ кг/м^3 и не зависит от температуры; атмосферное давление постоянно и равно $P_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Па; ускорение свободного падения $g = 10{,}0$ м/с^2; абсолютный нуль температуры $\tau = -273$ °C.

Фёдор решил, что с помощью данного прибора необходимо измерять температуру в диапазоне от $t_{\min} = 10$ °C до $t_{\max} = 40$ °C (по его мнению, именно в таком диапазоне изменяется температура в квартирах).

Фёдор рассудил, что давлением насыщенных паров воды внутри термоскопа можно пренебречь, так как в выбранном диапазоне температур оно значительно (более чем в 10 раз) меньше атмосферного давления.

Настройку термоскопа Фёдор проводил следующим образом. Трубку с сосудом вверху вертикально опускают в воду в нижнем сосуде так, что она незначительно погружается в воду. Погружённой в воду частью трубки можно пренебречь, также можно считать, что уровень воды в нижнем сосуде постоянен. После этого воду нагревают до температуры $t_{\max} = 40$ °C, воздух в трубке также нагревается до этой же температуры. Воздух частично выходит из трубки, тем самым оказывается, что при этой температуре высота уровня воды в трубке равна $h = 0$. При остывании уровень воды в трубке повышается, тем самым данный прибор можно использовать в качестве комнатного термометра.

1.1 Рассчитайте, при каком объёме верхнего сосуда V_1 вода полностью заполнит трубку (т. е. высота уровня воды в трубке станет равной $h = l$), если температура опустится до значения $t_{\min} = 10$ °C.

Для дальнейших расчётов удобно использовать следующие параметры: $\alpha = \dfrac{\rho g l}{P_0}$ — отношение гидростатического давления воды в полностью заполненной трубке к атмосферному; $\beta = \dfrac{Sl}{V_1 + Sl}$ — отношение объёма трубки к полному объёму термоскопа (верхнего сосуда и трубки); $z = \dfrac{h}{l}$ — относительная высота уровня воды в трубке (отношение высоты уровня к длине трубки).

1.2 Рассчитайте численные значения параметров установки α и β.

1.3 Получите уравнение, позволяющее рассчитать зависимость относительной высоты уровня воды в трубке от температуры в комнате $z(t)$. В качестве параметров этого уравнения должны входить только безразмерные параметры α, β и минимальная температура $t_{\min}$.

1.4 Постройте градуировочный график зависимости $z(t)$. Результаты расчётов (в том числе и промежуточные) приведите в таблице 1 листов ответов. График постройте на приведённом бланке листов ответов.

Часть 2. Реальные измерения.

В ходе экспериментальной проверки изготовленного термоскопа Фёдор обнаружил, что показания прибора заметно отличаются от рассчитанных значений. Фёдор понял, что давлением водяных паров внутри термоскопа пренебрегать нельзя. Найти зависимость давления насыщенных водяных паров от температуры не представляет труда. Эта зависимость в используемом диапазоне температур приведена в таблице 2 листов ответов. В этой части вы должны провести расчёт зависимости высоты поднятия воды в трубке от температуры с учётом влияния водяных паров. Все параметры прибора остались прежними.

2.1 Получите уравнение, позволяющее рассчитать зависимость относительной высоты уровня воды в трубке от температуры в комнате $z(t)$. В качестве параметров этого уравнения должны входить только безразмерные параметры α, β, минимальная температура $t_{\min}$, а также отношение давления насыщенных паров воды к атмосферному давлению $\gamma = \dfrac{P_{\text{нас}}}{P_0}$.

2.2 Рассчитайте значения относительной высоты уровня воды в трубке от температуры $z(t)$ для температур, приведённых в таблице 2. Постройте график полученной зависимости. Давление насыщенных паров $P_{\text{нас}}$ в зависимости от температуры:

t, °C	10	15	20	25	30	35	40
$P_{\text{нас}}$, кПа	1,228	1,706	2,339	3,169	4,246	5,627	7,381

▲ **Решение. Часть 1. Идеальный случай (без паров).**

Что происходит. Воздух в сосуде и трубке заперт водой: его масса

не меняется. При охлаждении воздух сжимается, и атмосферное давление загоняет воду в трубку; вода остановится там, где давление воздуха плюс давление столба воды сравняется с атмосферным. Главная идея: записать уравнение состояния *одной и той же порции воздуха* в двух состояниях: при настройке ($t_{\max}$, $h = 0$) и в текущем.

Обозначения. $T = t + 273$ — температура в кельвинах (так задан абсолютный нуль), $T_{\max} = 313$ К, $T_{\min} = 283$ К; $S = \pi d^2/4$ — площадь сечения трубки, Sl — её объём; P — давление воздуха в термоскопе.

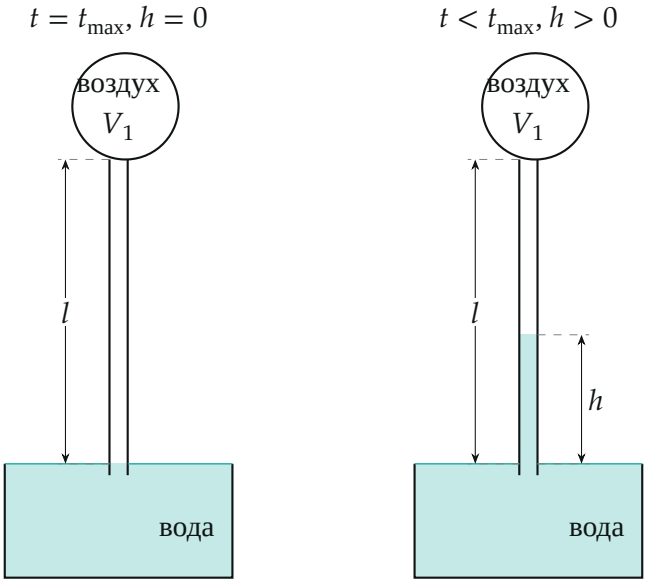

Рисунок 1. Термоскоп при настройке (слева) и при понижении температуры (справа). Масштаб по высоте условный.

1. Состояние при настройке. Уровни воды в трубке и в широком сосуде совпадают ($h = 0$), а давление в жидкости на одном уровне одинаково, поэтому давление воздуха равно атмосферному: $P = P_0$. Воздух занимает сосуд и всю трубку: $V_1 + Sl$.

2. Предельное состояние. Вода заполнила всю трубку ($h = l$), воздух сжат в верхний сосуд объёма V_1. Давление воздуха найдём из равенства давлений на уровне воды в нижнем сосуде: снизу вверх по трубке давление падает на $\rho g l$, поэтому $P = P_0 - \rho g l$.

Обратите внимание: давление воздуха в трубке над водой *меньше* атмосферного на $\rho g h$; брать P_0 в уравнении состояния нельзя.

3. Уравнение состояния. Масса воздуха постоянна, поэтому величина PV/T в этих двух состояниях одна и та же:

$$\frac{P_0\,(V_1 + Sl)}{T_{\max}} = \frac{(P_0 - \rho g l)\,V_1}{T_{\min}}.$$

Разделим на $P_0 V_1$ и введём $\alpha = \rho g l / P_0$:

$$1 + \frac{Sl}{V_1} = (1-\alpha)\frac{T_{\max}}{T_{\min}} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{Sl}{(1-\alpha)\dfrac{T_{\max}}{T_{\min}} - 1}.$$

4. Числа.

$$Sl = \frac{\pi d^2}{4}\,l = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}50^2}{4} \cdot 50\ \text{см}^3 \approx 9{,}82\ \text{см}^3,$$

$$\alpha = \frac{1{,}00 \cdot 10^3 \cdot 10{,}0 \cdot 0{,}50}{1{,}00 \cdot 10^5} = 5{,}0 \cdot 10^{-2},$$

$$V_1 = \frac{9{,}82\ \text{см}^3}{0{,}950 \cdot \dfrac{313}{283} - 1} \approx 194\ \text{см}^3,$$

$$\beta = \frac{Sl}{V_1 + Sl} = \frac{9{,}82}{194 + 9{,}82} \approx 0{,}048.$$

Обратите внимание: в официальном ответе записано $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$, но в расчёте подставлено 0,050; верно $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$.

5. Произвольная температура (пункт 1.3). Пусть вода стоит на высоте $h = zl$. Давление воздуха $P = P_0 - \rho g h = P_0(1 - \alpha z)$, объём $V = V_1 + Sl - Sh = (V_1 + Sl)(1 - \beta z)$. Уравнение состояния для текущего состояния и для настройки:

$$\frac{P_0\,(V_1 + Sl)}{T_{\max}} = \frac{P_0(1-\alpha z)\,(V_1 + Sl)(1-\beta z)}{T},$$

$$\frac{T}{T_{\max}} = (1 - \alpha z)(1 - \beta z).$$

Раскроем скобки и приведём к квадратному уравнению относительно z:

$$\alpha\beta z^2 - (\alpha + \beta) z + \left(1 - \frac{t + 273}{313}\right) = 0, \qquad 1 - \frac{t + 273}{313} = \frac{40 - t}{313}.$$

Корни:

$$z = \frac{(\alpha + \beta) \mp \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \dfrac{40 - t}{313}}}{2\alpha\beta}.$$

Нужен корень со знаком «минус»: при $t = 40$ °C вода стоит на нуле, $z = 0$, и только он даёт ноль. Второй корень при $t = 40$ °C равен $(\alpha + \beta)/(\alpha\beta) \approx 41$, а z не может превышать единицу.

6. Градуировка (пункт 1.4). Здесь $c = \dfrac{40 - t}{313}$. Подставим $\alpha = 0{,}050$, $\beta = 0{,}0483$ ($\alpha\beta = 2{,}41 \cdot 10^{-3}$, $\alpha + \beta = 0{,}0983$):

t, °C	T, K	c	z
10	283	0,0958	1,000
15	288	0,0799	0,830
20	293	0,0639	0,661
25	298	0,0479	0,494
30	303	0,0319	0,328
35	308	0,0160	0,163
40	313	0,0000	0,000

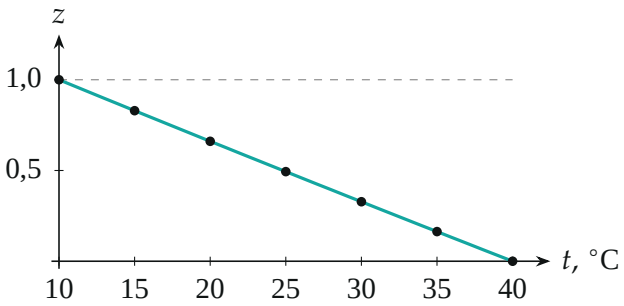

Рисунок 2. Градуировочный график идеального термоскопа: почти прямая, на 10 °C вода доходит до конца трубки ($z = 1$).

Замечания. 1) Проще получить обратную зависимость: $t = T_{\max}(1 - \alpha z)(1 - \beta z) - 273$ прямо из уравнения пункта 5. 2) Если пренебречь $\alpha\beta$ (мало по сравнению с $\alpha + \beta$), получим линейную шкалу $z \approx \dfrac{40 - t}{313(\alpha + \beta)}$: на 10 °C $z \approx 0{,}975$ — график почти прямой, как на рисунке.

Проверка части 1. При $z = 1$ из уравнения пункта 5: $T = 313 \cdot 0{,}950 \cdot 0{,}9517$ K $= 283{,}0$ K, то есть 10 °C, как и требовалось в пункте 1.1. Смысл: вода тем выше, чем холоднее воздух, и шкала почти равномерна.

Часть 2. Учёт насыщенных паров.

Что происходит. Над водой в трубке и в сосуде теперь не только воздух, но и насыщенный водяной пар. Его давление $P_{\text{нас}}(t)$ зависит только от температуры и не зависит от объёма (лишний пар конденсируется). Поэтому уравнение состояния выполняется только для *сухого воздуха*, масса которого постоянна. Главная идея: в уравнении состояния и в условии равновесия столба вместо P войдёт давление сухого воздуха $P_{\text{в}} = P - P_{\text{нас}}$.

Обозначения. $\gamma(t) = P_{\text{нас}}(t)/P_0$, $\gamma_{\max} = \gamma(40\ ^\circ\text{C}) = 0{,}0738$.

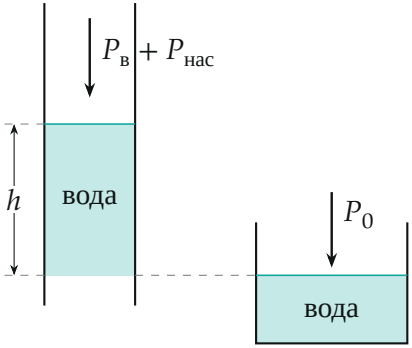

Рисунок 3. Равенство давлений на уровне воды в широком сосуде.

1. Равновесие столба воды. На уровне поверхности воды в широком сосуде давление снаружи равно P_0, а внутри трубки оно складывается из давления газов над водой и давления столба: $P_в + P_{нас} + \rho g h = P_0$. Отсюда давление сухого воздуха

$$P_в = P_0 - P_{нас} - \rho g h = P_0\,(1 - \gamma - \alpha z).$$

2. Состояние при настройке. При t_{max} и $h = 0$ сухой воздух занимает объём $V_1 + Sl$, и его давление равно $P_0 - P_{нас}(t_{max}) = P_0(1 - \gamma_{max})$.

Обратите внимание: и при настройке воздух насыщен паром, поэтому его давление там не P_0, а $P_0(1 - \gamma_{max})$ — на 7 % меньше. Если взять P_0 (как в части 1), получится заметная ошибка.

3. Уравнение состояния сухого воздуха для настройки и для произвольной температуры, объём — как в части 1, $(V_1 + Sl)(1 - \beta z)$:

$$\frac{P_0(1 - \gamma_{max})(V_1 + Sl)}{T_{max}} = \frac{P_0(1 - \gamma - \alpha z)(V_1 + Sl)(1 - \beta z)}{T},$$

$$(1 - \gamma_{max})\frac{T}{T_{max}} = (1 - \gamma - \alpha z)(1 - \beta z).$$

Раскроем скобки:

$$\alpha\beta z^2 - (\alpha + \beta(1 - \gamma))\,z + (1 - \gamma) - (1 - \gamma_{max})\frac{T}{T_{max}} = 0.$$

Это квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$ с $a = \alpha\beta$, $b = -(\alpha + \beta(1-\gamma))$ и

$$c = (1-\gamma) - (1-\gamma_{\max})\frac{T}{T_{\max}}.$$

При $t = 40$ °C коэффициент $c = 0$, нужный корень — со знаком «минус»:

$$z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4. Расчёт (пункт 2.2). Коэффициент $a = \alpha\beta = 2{,}41 \cdot 10^{-3}$ один для всех температур:

t, °C	$P_{\text{нас}}$, кПа	γ	b	c	z
10	1,228	0,01228	−0,09767	0,15030	1,602
15	1,706	0,01706	−0,09744	0,13073	1,389
20	2,339	0,02339	−0,09713	0,10960	1,162
25	3,169	0,03169	−0,09673	0,08651	0,915
30	4,246	0,04246	−0,09621	0,06094	0,644
35	5,627	0,05627	−0,09554	0,03234	0,341
40	7,381	0,07381	−0,09470	0,00000	0,000

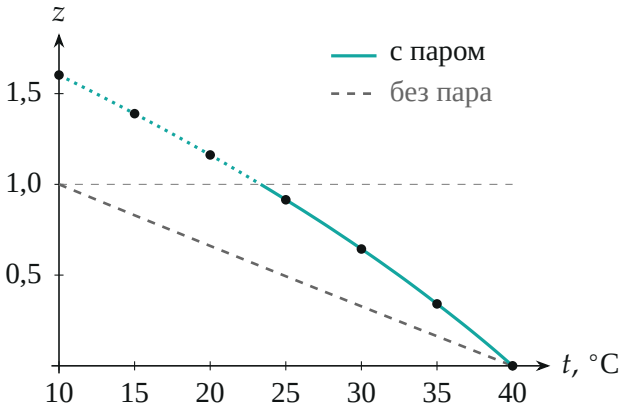

Рисунок 4. Сплошная линия — с учётом пара, штриховая — идеальный случай. Пунктир выше $z = 1$ — формальное продолжение: вода туда не поме-

стится.

Физический смысл: при $z > 1$ формальный корень лежит за концом трубки, значит, вода заполнит трубку целиком уже при температуре выше 10 °C. По таблице вода достигает конца трубки примерно при 23 °C (между 20 и 25 °C): нижняя граница рабочей шкалы поднимается с 10 до ≈ 23 °C.

Проверка части 2. При $\gamma \to 0$ коэффициенты переходят в $b \to -(\alpha + \beta)$, $c \to 1 - T/T_{\max}$ — получаем уравнение части 1. Подстановка $t = 25$ °C, $z = 0{,}915$ в исходное уравнение: слева $0{,}9262 \cdot \dfrac{298}{313} = 0{,}8818$, справа $(1 - 0{,}0317 - 0{,}0458)(1 - 0{,}0442) = 0{,}8818$ — равенство верно. Смысл: при 40 °C пар занимал 7,4 % давления, а при охлаждении он конденсируется, поэтому сжатие смеси сильнее, чем у сухого воздуха, и вода поднимается выше (0,915 против 0,494 при 25 °C).

Ответ. 1.1) $V_1 \approx 194$ см^3; 1.2) $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-2}$, $\beta = 0{,}048$; 1.3) $\alpha\beta z^2 - (\alpha + \beta)z + \dfrac{40 - t}{313} = 0$, откуда $z = \dfrac{(\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\,\frac{40-t}{313}}}{2\alpha\beta}$; 1.4) $z = 1{,}00;\ 0{,}83;\ 0{,}66;\ 0{,}49;\ 0{,}33;\ 0{,}16;\ 0$ при $t = 10, 15, \ldots, 40$ °C; 2.1) $az^2 + bz + c = 0$, $a = \alpha\beta$, $b = -(\alpha + \beta(1 - \gamma))$, $c = (1 - \gamma) - (1 - \gamma_{\max})\dfrac{T}{T_{\max}}$; 2.2) $z = 1{,}60;\ 1{,}39;\ 1{,}16;\ 0{,}92;\ 0{,}64;\ 0{,}34;\ 0$ при тех же температурах (значения $z > 1$ физически не реализуются).