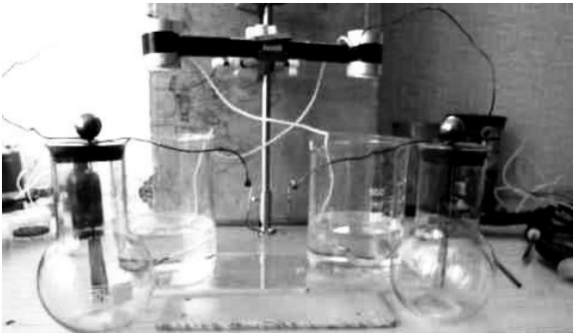
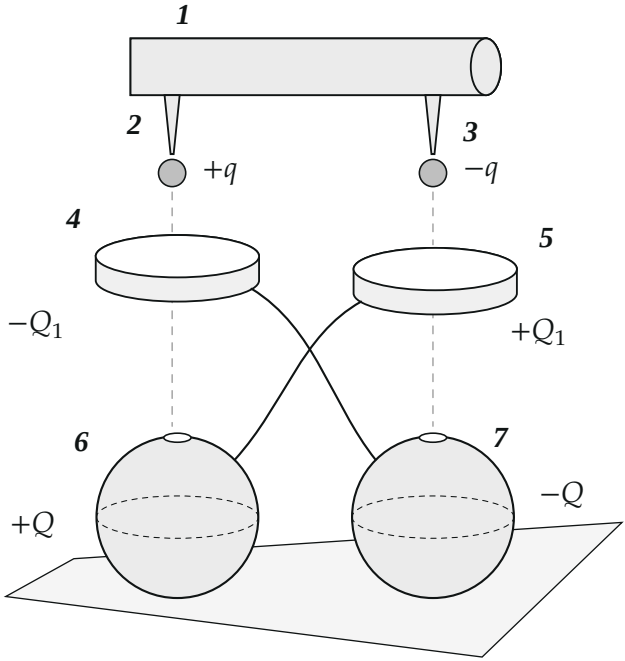
Капельница Кельвина

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 10 класс, задача 2] Капельница Кельвина — электростатический генератор, изобретённый Уильямом Томсоном (лордом Кельвином) в 1867 году. Простая конструкция позволяет, тем не менее, получить напряжения порядка 10 кВ.



В настоящее время имеется много различных модификаций этого прибора, который сейчас рассматривается как забавная игрушка. В данном задании рассмотрим следующую упрощённую модель этого устройства.

Цилиндрический сосуд 1, заполненный водой, снабжён двумя небольшими трубочками — капельницами 2 и 3, из которых с некоторым интервалом падают капли. Капли пролетают через проводящие кольца 4 и 5 и попадают в проводящие сферические сосуды 6 и 7 с небольшими отверстиями. Сосуды соединены с кольцами «крест-накрест».



Принцип работы этого электростатического генератора очевиден:

- изначально сосудам 6 и 7 сообщают небольшие электрические заряды противоположного знака $+Q$ и $-Q$; радиусы этих сосудов равны R. Электростатическим воздействием одного сосуда на другой следует пренебречь;
- часть этих зарядов $\pm Q_1$ перетекает на кольца 4 и 5; два кольца служат обкладками конденсатора, электрическая ёмкость которого равна C; так как эта ёмкость мала, то следует считать, что $|Q_1| \ll |Q|$; радиусы колец равны r, они находятся на расстоянии h от концов трубок с каплями, толщина колец значительно меньше их радиусов;
- электрическое поле колец индуцирует на каплях заряды $\pm q$, радиусы капель равны a; расстояние от сосудов 6 и 7 до капель достаточно велико, поэтому влиянием поля сосудов на капли можно пренебречь; расстояние между каплями также значительно больше радиусов капель; сосуд с водой 1 заземлён.

Таким образом, капли приобретают электрический заряд, который при попадании капли в сосуд передаётся соответствующему сосуду, увеличивая его заряд.

1. Пусть заряды каждого сосуда равны $\pm Q$. Найдите, какие заряды $\pm Q_1$ возникают на кольцах.

2. Рассчитайте электрические заряды капель $\pm q$. Величину этого заряда можно представить в виде $q = \alpha Q$, где α — некоторый безразмерный коэффициент. Запишите формулу для этого коэффициента.

3. Обозначим заряды сосудов до падения первых капель $\pm Q_0$. Найдите заряды этих сосудов после того, как в них упало по N капель. Ответ выразите через коэффициент α.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Заряженные сферы создают на кольцах разность потенциалов, а кольца как обкладки конденсатора накапливают небольшие заряды $\pm Q_1$. Пока капля ещё не оторвалась, она соединена с заземлённой водой, её потенциал равен нулю; чтобы его сохранить, на капле наводится заряд противоположного знака относительно ближайшего кольца. Капля падает в сферу и передаёт ей этот заряд — того же знака, что у сферы. Значит, после каждой капли заряд сферы растёт в одно и то же число раз. Главная идея: потенциал капли равен нулю, пока она не оторвалась.

Обозначения. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; φ_6, φ_7 — потенциалы сфер; Q_N — заряд сферы 6 после падения в неё N капель (заряд сферы 7 равен $-Q_N$).

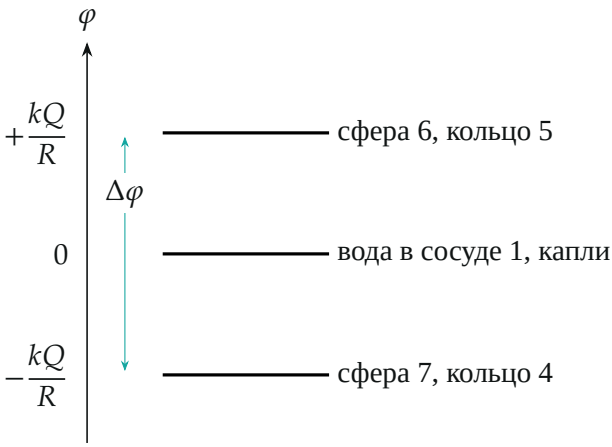


Рисунок 2. Потенциалы: соединённые проводом сфера и кольцо — один проводник. Между кольцами $\Delta\varphi = 2kQ/R$.

1. Заряд колец. Поле заряженной сферы снаружи такое же, как у точечного заряда в центре, поэтому потенциал сферы с зарядом Q и радиусом R

$$\varphi = \frac{kQ}{R}.$$

У сфер 6 и 7 потенциалы $\varphi_6 = +kQ/R$ и $\varphi_7 = -kQ/R$. Кольцо соединено со сферой проводом, значит, у них один потенциал: кольцо 5 имеет $+kQ/R$, кольцо 4 — $-kQ/R$. Разность потенциалов между кольцами

$$\Delta\varphi = \frac{kQ}{R} - \left(-\frac{kQ}{R}\right) = \frac{2kQ}{R}.$$

Кольца — обкладки конденсатора ёмкости C, поэтому заряд каждой обкладки по определению ёмкости

$$Q_1 = C\,\Delta\varphi = \frac{2kC}{R}\,Q.$$

Знаки: кольцо 5 (потенциал выше) заряжено положительно, кольцо 4 — отрицательно, как на рисунке условия.

Обратите внимание: $Q_1 \ll Q$, поэтому заряд, ушедший на кольцо, почти не меняет заряд и потенциал сферы. Именно это позволило записать

$\varphi = kQ/R$, а не $k(Q - Q_1)/R$.

2. Заряд капли. Рассмотрим каплю у конца трубки 2 под кольцом 4. Она соединена с водой в сосуде 1, а сосуд заземлён, значит, потенциал капли равен нулю. Он складывается из потенциала $\varphi_к$ кольца в месте капли и потенциала $\varphi_{кап} = kq/a$ её собственного заряда на её поверхности. Влияние второго кольца и второй капли, а также сфер не учитываем: оно мало по условию.

Кольцо тонкое, и все его малые элементы находятся от капли на одном и том же расстоянии $\sqrt{r^2 + h^2}$ (рисунок 3). Потенциал — скаляр, поэтому вклады элементов складываются просто, и потенциал всего кольца с зарядом $-Q_1$ в месте капли

$$\varphi_к = -\frac{kQ_1}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

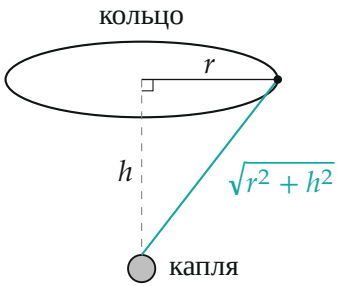


Рисунок 3. Любая точка кольца находится от капли на расстоянии $\sqrt{r^2 + h^2}$.

Потенциал капли равен нулю:

$$-\frac{kQ_1}{\sqrt{r^2 + h^2}} + \frac{kq}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} Q_1 = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cdot \frac{2kC}{R} Q.$$

Капля 2 под отрицательным кольцом получила заряд $+q$, а капля 3 под положительным — $-q$, как на рисунке условия. Сравнивая с $q = \alpha Q$, получаем

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cdot \frac{2kC}{R}.$$

3. Заряд после N капель. Пусть в сосуд 6 упало $N-1$ капель и его заряд равен Q_{N-1}. Тогда очередная капля, наведённая кольцом, получит заряд $q = \alpha Q_{N-1}$ того же знака, что у сосуда, и после её падения

$$Q_N = Q_{N-1} + \alpha Q_{N-1} = (1+\alpha)\, Q_{N-1}.$$

Коэффициент α определяется только геометрией и ёмкостью, от заряда он не зависит, поэтому заряд растёт геометрической прогрессией со знаменателем $1+\alpha$:

$$Q_N = (1+\alpha)^N Q_0.$$

По симметрии то же верно для сосуда 7: его заряд $-Q_N$.

Обратите внимание: формула верна, когда в оба сосуда упало по N капель (капли падают парами). Если $\alpha \ll 1$, то $Q_N \approx Q_0\, e^{\alpha N}$, и заряд удваивается за $N \approx 0{,}69/\alpha$ капель.

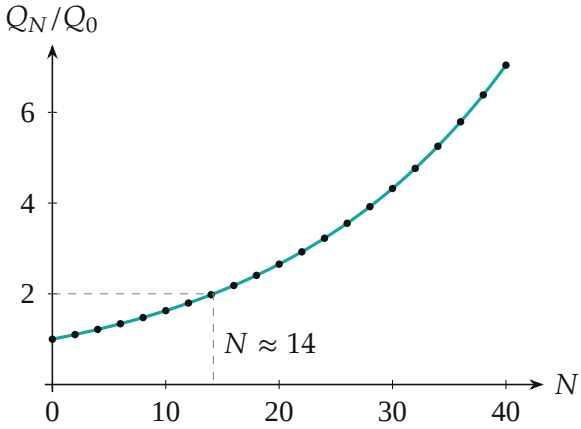


Рисунок 4. Пример: $\alpha = 0{,}05$ (значение взято для иллюстрации, в условии его нет). Заряд растёт по геометрической прогрессии.

Проверка. Размерность: kC — длина (для шара $C = R/k$), поэтому kC/R и $a/\sqrt{r^2+h^2}$ безразмерны, α безразмерно. Предельные случаи: при $C \to 0$ или $a \to 0$ получаем $\alpha \to 0$, $Q_N = Q_0$ — заряд не растёт, как и должно быть без ёмкости колец или без капель. Смысл: прибор усиливает исходную малую разность зарядов, так как каждая капля несёт заряд, пропорциональный нынешнему, и уносит его в сферу.

Ответ. 1) $Q_1 = \dfrac{2kC}{R}Q$; 2) $q = \alpha Q$, $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{r^2+h^2}} \cdot \dfrac{2kC}{R}$; 3) $Q_N = (1+\alpha)^N Q_0$ (заряд второго сосуда $-Q_N$).