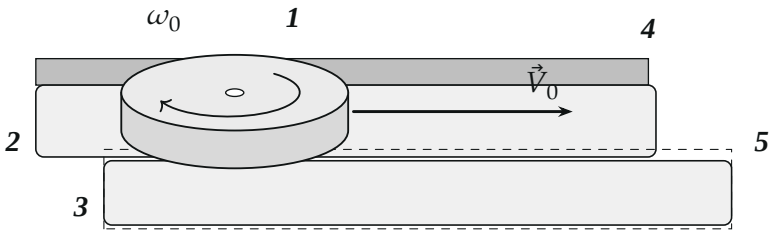
Диск на рельсах

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 10 класс, задача 3] Массивный однородный диск 1 радиуса R может скользить по двум узким горизонтальным параллельным рельсам 2 и 3. Диск опирается на рельсы своими краями. Коэффициент трения диска о рельсы равен μ. По бокам рельсов расположены упорные стенки 4 и 5, не позволяющие диску соскользнуть с рельсов. Трением диска об эти упорные стенки можно пренебречь.



Часть 1. Динамика вращательного движения.

Пусть ось диска удерживается неподвижной, при этом диск вращается, опираясь на рельсы. Диск раскрутили до угловой скорости ω_0 и положили на рельсы. Обозначим скорость крайних точек диска относительно его центра $v = \omega R$.

1.1 Покажите, что изменение модуля скорости крайних точек диска описывается уравнением

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -4\,\frac{F_{\text{тр}}}{m},$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения, действующая на диск со стороны одного рельса, m — масса диска. Это уравнение описывает изменение скорости вращательного движения и в случае наличия поступательного движения.

Подсказка: кинетическая энергия диска, вращающегося вокруг собственной оси с угловой скоростью ω, равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mR^2\omega^2}{4} = \frac{mv^2}{4}.$$

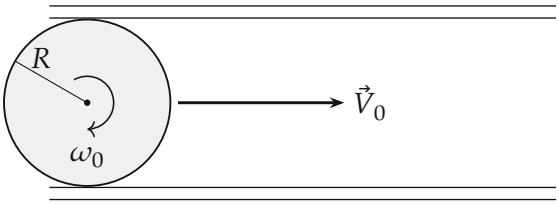
1.2 Найдите, за какое время угловая скорость диска уменьшится в два раза.

1.3 Найдите, сколько оборотов сделает диск до полной остановки.

Часть 2. Движение диска по рельсам.

Далее считаем, что диск может двигаться поступательно по рельсам. Диск раскручивают до угловой скорости ω_0 вокруг его оси, аккуратно кладут на рельсы и сообщают скорость $V_0 = 2\omega_0 R$, направленную вдоль рельсов.

вид сверху



2.1 Нарисуйте схематические графики зависимости модулей скорости поступательного движения V и скорости вращательного движения относительно оси $v = \omega R$ от времени.

2.2 Через какое время после начала движения скорости поступательного V и вращательного v станут равными?

2.3 Рассчитайте среднее ускорение оси диска после того, как скорости поступательного и вращательного движения стали равными.

2.4 Найдите, какой полный путь пройдёт диск до остановки (ответ выразите через V_0 и μ).

▲ **Решение. Часть 1. Диск с неподвижной осью.**

Что происходит. Края диска скользят по рельсам, и сила трения тормозит вращение. Рельсы расположены по двум краям диска, поэтому на диск действуют две одинаковые силы трения, направленные в противоположные стороны, — пара сил. Поступательно диск не движется, а вращение замедляется. Главная идея: сила трения постоянна (μN, N не меняется), значит, угловая скорость падает линейно.

Обозначения. Рельс, на который опирается край A, — рельс A; другой — рельс B. N — сила нормальной реакции одного рельса, $F_{\text{тр}} = \mu N$ — сила трения о один рельс.

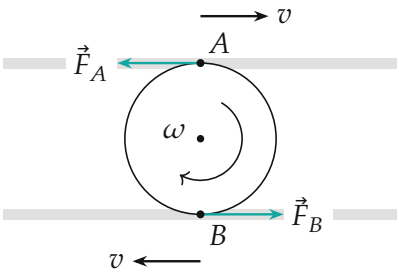


Рисунок 1. Вид сверху. Крайняя точка A скользит по рельсу вправо, точка B — влево; силы трения направлены против скольжения.

1. Нормальные реакции и сила трения. Диск тонкий, а силы трения горизонтальны и лежат в плоскости касания, поэтому они не меняют вертикальные реакции. Равновесие по вертикали и симметрия дают $2N = mg$, то есть $N = mg/2$, и

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \frac{\mu mg}{2}.$$

Трение направлено против скорости скольжения точки относительно рельса: у A она направлена вправо, значит, сила $\vec{F}_A$ направлена влево, а у B — наоборот.

2. Уравнение для $\Delta v/\Delta t$ (пункт 1.1). Рассмотрим малый промежуток времени Δt. Ось неподвижна, поэтому изменение кинетической энергии диска равно работе сил трения. Каждая сила трения $F_{\text{тр}}$ направлена против скорости v своей точки, и работа обеих сил за Δt равна $-2F_{\text{тр}} v\,\Delta t$:

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{4}\right) = -2F_{\text{тр}}\, v\,\Delta t.$$

Левую часть преобразуем: $\dfrac{m}{4}((v+\Delta v)^2 - v^2) = \dfrac{m}{2}\, v\,\Delta v$ (малым слагае-

мым $(\Delta v)^2$ пренебрегли). Сократим на $v\Delta t$:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{4F_{\text{тр}}}{m}.$$

Второй способ. Основное уравнение вращения: момент пары сил $2F_{\text{тр}}R$ тормозит диск с моментом инерции $I = mR^2/2$:

$$\frac{mR^2}{2}\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -2F_{\text{тр}}R \;\Rightarrow\; \frac{\Delta v}{\Delta t} = R\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -\frac{4F_{\text{тр}}}{m},$$

то же самое. Обратите внимание: это уравнение относится к скорости $v = \omega R$ краёв *относительно центра*, поэтому оно верно и тогда, когда диск движется поступательно.

3. Время уменьшения угловой скорости вдвое (пункт 1.2). Подставим $F_{\text{тр}} = \mu mg/2$:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -2\mu g.$$

Ускорение постоянно, значит $v = \omega_0 R - 2\mu g\, t$. Скорость v вдвое меньше начальной, когда $2\mu g\, t = \omega_0 R/2$:

$$t_{1/2} = \frac{\omega_0 R}{4\mu g}.$$

4. Число оборотов (пункт 1.3). Вращение прекращается при $v = 0$, то есть через $t_{\text{ост}} = \dfrac{\omega_0 R}{2\mu g}$. Угловая скорость падает линейно от ω_0 до 0, поэтому средняя угловая скорость равна $\omega_0/2$, и за это время диск повернётся на

$$\varphi = \frac{\omega_0}{2}\,t_{\text{ост}} = \frac{\omega_0^2 R}{4\mu g}, \qquad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{R\omega_0^2}{8\pi\mu g}.$$

Проверка по энергии: начальная энергия вращения $\dfrac{mR^2\omega_0^2}{4}$ равна работе двух сил трения на пути $2\pi RN$ каждая: $2\cdot\dfrac{\mu mg}{2}\cdot 2\pi RN = \mu mg\cdot 2\pi RN$.

Отсюда тот же N.

Часть 2. Диск движется по рельсам.

Что происходит. Теперь у центра диска есть скорость V вдоль рельсов, а края вращаются со скоростью $v = \omega R$ относительно центра. Скорость крайней точки относительно своего рельса равна $V + v$ у точки A и $V - v$ у точки B. От знака разности $V - v$ зависит, куда направлена сила трения, поэтому задача распадается на стадии: сначала $V > v$, затем скорости выравниваются. Главная идея: на каждой стадии записать трение по знаку скорости скольжения и применить второй закон Ньютона для центра и уравнение вращения.

Обозначения. Ось x — вдоль $\vec{V}_0$; F_A, F_B — проекции сил трения на ось x; ω — угловая скорость в том направлении, в котором диск был раскручен. Уравнения для центра и для вращения:

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = F_A + F_B, \qquad \frac{mR^2}{2}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = R\,(F_A - F_B).$$

Второе уравнение: момент силы F_A вращает диск в сторону ω_0, а F_B — против.

1. Стадия $V > v$ (начало движения). Скорости $V + v$ и $V - v$ обе положительны: оба края скользят вперёд, обе силы трения направлены назад и равны $\mu mg/2$ (рисунок 2, вверху). Тогда

$$m\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\mu mg \;\Rightarrow\; V = V_0 - \mu g\, t,$$

$$R\,(F_A - F_B) = 0 \;\Rightarrow\; v = \text{const} = \omega_0 R = \frac{V_0}{2}.$$

Вращение не меняется: моменты двух равных сил трения компенсируют друг друга.

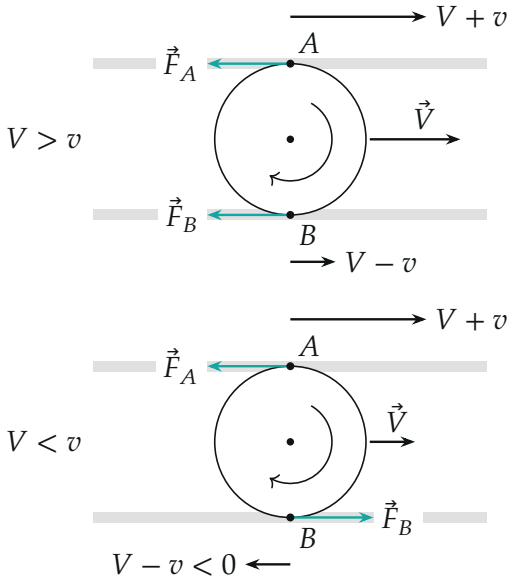


Рисунок 2. Вид сверху: скорости крайних точек относительно рельсов (чёрные) и силы трения (бирюзовые). Вверху $V > v$: обе силы назад. Внизу $V < v$: точка B скользит назад, сила $\vec{F}_B$ направлена вперёд.

2. Время выравнивания (пункт 2.2). Скорости сравняются, когда $V = v$:

$$V_0 - \mu g\, t_1 = \omega_0 R = \frac{V_0}{2} \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{V_0 - \omega_0 R}{\mu g} = \frac{\omega_0 R}{\mu g}.$$

3. Что будет дальше. Если бы стало $V < v$, точка B поехала бы назад: силы трения оказались бы противоположны ($F_A = -\mu mg/2$, $F_B = +\mu mg/2$), центр не получил бы ускорения, а вращение замедлилось бы с $\Delta v/\Delta t = -2\mu g$ (рисунок 2, внизу). Поэтому v быстро падает к V, и устанавливается режим $V = v$: точка B неподвижна относительно рельса B (рисунок 3). На рельсе B действует сила трения *покоя* F_B — она подстраивается, а скользит только край A: $F_A = -\mu mg/2$.

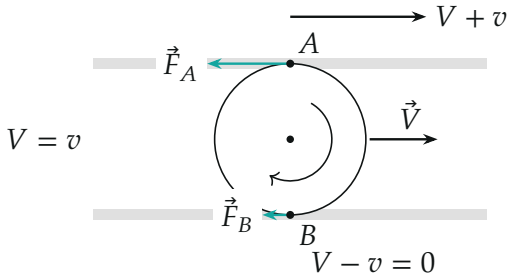


Рисунок 3. Режим $V = v$: край B не проскальзывает, сила $\vec{F}_B$ — трение покоя (она меньше по модулю, чем $\mu mg/2$).

4. Ускорение в режиме $V = v$ (пункт 2.3). Связь $v = V$ даёт $\Delta\omega/\Delta t = \dfrac{1}{R}\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$. Подставим в уравнения движения, $a = \Delta V/\Delta t$:

$$ma = F_A + F_B, \qquad \frac{m}{2}a = F_A - F_B.$$

Сложим уравнения: $\dfrac{3m}{2}a = 2F_A$; вычтем второе из первого: $\dfrac{m}{2}a = 2F_B$. Подставим $F_A = -\mu mg/2$:

$$a = \frac{4F_A}{3m} = -\frac{2}{3}\mu g, \qquad F_B = \frac{ma}{4} = -\frac{\mu mg}{6}.$$

Обратите внимание: режим $V = v$ действительно возможен: $|F_B| = \mu mg/6 < \mu N = \mu mg/2$, трение покоя не превосходит предельного. Среднее ускорение оси равно $\dfrac{2}{3}\mu g$ (модуль), направлено против движения.

5. Графики (пункт 2.1). Стадия 1 длится $t_1 = \dfrac{V_0}{2\mu g}$: V линейно падает от V_0 до $V_0/2$, $v = V_0/2$ постоянна. Стадия 2: обе скорости равны и убывают с ускорением $\frac{2}{3}\mu g$ от $V_0/2$ до нуля за время $\dfrac{V_0/2}{(2/3)\mu g} = \dfrac{3V_0}{4\mu g}$. Диск остановится в момент $t_2 = t_1 + \dfrac{3V_0}{4\mu g} = \dfrac{5V_0}{4\mu g}$.

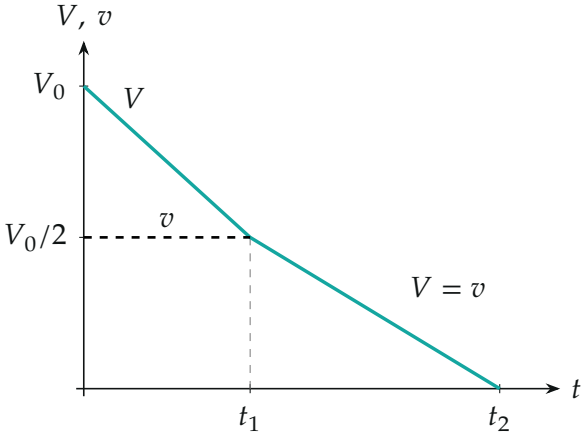


Рисунок 4. Модули скоростей: V (сплошная) и v (штриховая). После t_1 линии совпадают.

6. Путь до остановки (пункт 2.4). Сложим путь по стадиям: на первой равноускоренное движение с μg, на второй — с $\frac{2}{3}\mu g$ от $V_0/2$ до нуля:

$$S = \frac{V_0^2 - (V_0/2)^2}{2\mu g} + \frac{(V_0/2)^2}{2\cdot\frac{2}{3}\mu g} = \frac{3V_0^2}{8\mu g} + \frac{3V_0^2}{16\mu g} = \frac{9V_0^2}{16\,\mu g}.$$

Проверка. Второй способ для пункта 2.4 — энергия. Начальная энергия $\dfrac{mV_0^2}{2} + \dfrac{m(V_0/2)^2}{4} = \dfrac{9mV_0^2}{16}$. В обеих стадиях мощность потерь на трение равна $\mu mg\,V$: на первой $\frac{\mu mg}{2}[(V+v)+(V-v)] = \mu mg\,V$, на второй скользит только край A со скоростью $2V$ при силе $\frac{\mu mg}{2}$. Потери за всё время равны $\mu mg\,S$, где S — путь центра. Значит, $\mu mg\,S = \dfrac{9mV_0^2}{16}$ и $S = \dfrac{9V_0^2}{16\mu g}$, как и выше. Среднее ускорение $2\mu g/3$ совпадает и с усреднением попеременных стадий $V \gtrless v$ из официального решения: $\dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \dfrac{\mu g \cdot 2\mu g}{3\mu g}$. Смысл: пока $V > v$, диск тормозят обе рельсы, а после выравнивания один край перестаёт проскальзывать, и торможение мягче.

Ответ. 1.1) $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} = -\dfrac{4F_{\text{тр}}}{m}$; 1.2) $t_{1/2} = \dfrac{\omega_0 R}{4\mu g}$; 1.3) $N = \dfrac{R\omega_0^2}{8\pi\mu g}$; 2.1) графики на рисунке 4; 2.2) $t_1 = \dfrac{\omega_0 R}{\mu g} = \dfrac{V_0}{2\mu g}$; 2.3) $\langle a \rangle = \dfrac{2}{3}\,\mu g$; 2.4) $S = \dfrac{9V_0^2}{16\mu g}$.