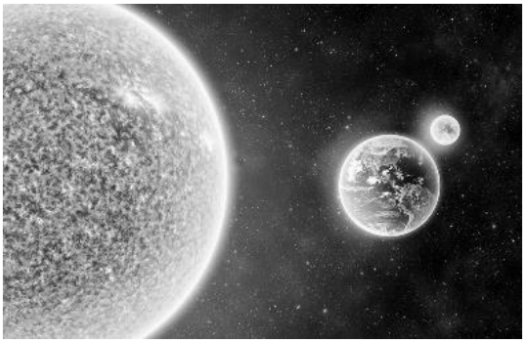
Размер Солнца

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 11 класс, задача 1]

Средний видимый диаметр Солнца — $31'59''$ (изменяется от $31'31''$ до $32'36''$).



Для расчётов примем, что угловой размер Солнца равен $\alpha = 32'$. К каким наблюдаемым эффектам это приводит? Решите данную задачу!

1. У вас имеется металлический шарик, диаметр которого равен 5,0 мм. На каком расстоянии от глаза нужно расположить шарик, чтобы он полностью закрывал Солнце?
   Интенсивность равна энергии излучения, падающего на единицу площади поверхности в единицу времени. Солнечная постоянная — суммарная мощность солнечного излучения, проходящего через единицу площади, ориентированной перпендикулярно потоку солнечных лучей; считайте, что на поверхности Земли она равна $A = 1{,}2$ кВт/м^2.
2. На листе бумаги получают изображение Солнца с помощью линзы, диаметр которой равен 10 см, а фокусное расстояние линзы 25 см. Найдите интенсивность света, падающего на полученное изображение Солнца.
3. Воздушный шар радиуса $R = 5{,}0$ м поднимается над поверхностью Земли. Солнце находится на высоте $\beta = 30°$ над горизонтом. При какой максимальной высоте подъёма шара его тень будет видна на поверхности Земли?

4. Источником излучения в интерференционной схеме Юнга служит весь диск Солнца. С помощью светофильтров из излучения Солнца выделяют монохроматическую компоненту с длиной волны $\lambda = 550$ нм. При каком максимальном расстоянии d между отверстиями в экране можно наблюдать интерференционную картину?

При выполнении всех частей данного задания вам необходимо построить ход световых лучей, объясняющих ваше решение.

▲ **Решение. Что происходит.** Солнце видно под очень малым углом α. Во всех четырёх пунктах работает одна и та же идея: при малом угле дуга совпадает с хордой, поэтому поперечник равен расстоянию, умноженному на угол (поперечник $=$ расстояние $\cdot\,\alpha$). Меняется только то, что именно мы измеряем: расстояние до шарика, размер изображения, длину конуса тени или разность хода.

Угол в радианах.

$$\alpha = 32' = \frac{32}{60}\cdot\frac{\pi}{180}\ \text{рад} \approx 9{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{рад}.$$

Обратите внимание: формулу «поперечник = расстояние × угол» можно применять только при угле в радианах.

Пункт 1. Шарик закрывает Солнце. Шарик закроет диск целиком, если виден из глаза O под углом не меньше α. Предельный случай: лучи зрения, идущие к краям Солнца, касаются шарика с двух сторон (рисунок). Шарик диаметром d на расстоянии L виден под углом d/L, и этот угол равен α:

$$d = L\alpha \quad\Rightarrow\quad L = \frac{d}{\alpha} = \frac{5{,}0\cdot 10^{-3}}{9{,}3\cdot 10^{-3}}\ \text{м} \approx 0{,}54\ \text{м}.$$

Дальше этого расстояния шарик станет виден под меньшим углом и закрывать будет уже не всё Солнце.

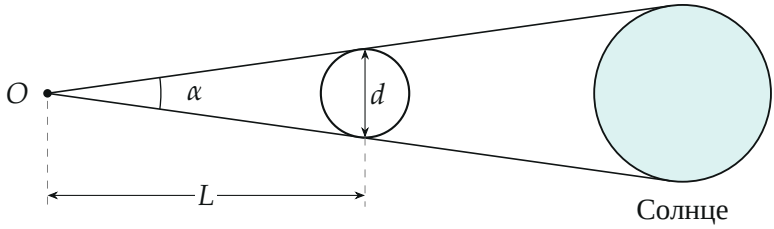


Рисунок 1. Предельное положение шарика: лучи из точки O касаются шарика и идут к краям диска Солнца. Угол α нарисован крупнее настоящего.

Пункт 2. Интенсивность в изображении Солнца. Солнце очень далеко, поэтому лучи от каждой точки его диска идут параллельным пучком. Пучок от края диска наклонён к оси линзы на угол $\alpha/2$ и собирается в точке фокальной плоскости. Его луч через оптический центр не преломляется, поэтому точка лежит на высоте $F\,\mathrm{tg}(\alpha/2) \approx F\alpha/2$ от оси; для противоположного края — на той же высоте по другую сторону. Диаметр изображения (лист бумаги стоит в фокальной плоскости):

$$d_{\text{изобр}} = \alpha F \approx 9{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}25\ \text{м} \approx 2{,}3\ \text{мм}.$$

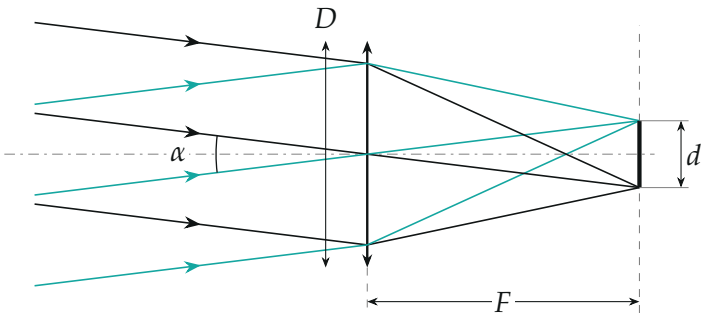


Рисунок 2. Пучки от двух краёв Солнца. Луч через центр линзы не преломляется, поэтому $d = \alpha F$.

Вся энергия, которую собрала линза, попадает в изображение (потери в стекле не учитываем). Линза площадью $\pi D^2/4$ пропускает мощность

$P = A\,\pi D^2/4$, а изображение имеет площадь $\pi d_{\text{изобр}}^2/4$, поэтому

$$I = \frac{P}{\pi d_{\text{изобр}}^2/4} = A\left(\frac{D}{\alpha F}\right)^2 = 1200\left(\frac{0{,}10}{9{,}3\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}25}\right)^2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2},$$

$$I \approx 2{,}2\cdot 10^6\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Пункт 3. Тень воздушного шара. Тень — область, куда не попадает свет ни от одной точки диска. Её ограничивают лучи от краёв Солнца, касающиеся шара с одной и той же стороны. Шар мал по сравнению с расстоянием до Солнца, поэтому край диска виден от шара под углом $\alpha/2$ к оси, и такой луч наклонён к оси тени на $\alpha/2$. Радиус тени на расстоянии x за шаром:

$$\rho(x) = R - x\,\frac{\alpha}{2}.$$

Тень кончается в вершине конуса, где $\rho = 0$, на расстоянии L от центра шара:

$$L = \frac{2R}{\alpha} = \frac{2\cdot 5{,}0}{9{,}3\cdot 10^{-3}}\ \text{м} \approx 1{,}07\cdot 10^3\ \text{м}.$$

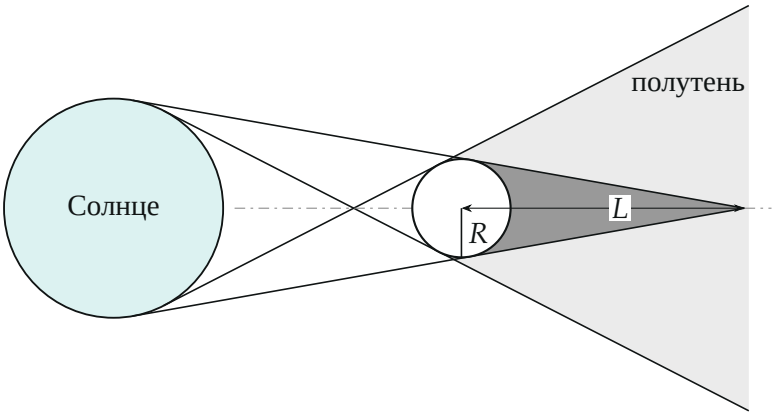


Рисунок 3. Тёмный конус — тень, светлый — полутень (угол α крупнее настоящего).

Шар поднят на высоту H над землёй, ось тени идёт под углом β к горизонту. Тень видна на земле, пока вершина конуса не выше земли: расстояние вдоль оси от шара до земли равно $H/\sin\beta$ и не должно превышать L.

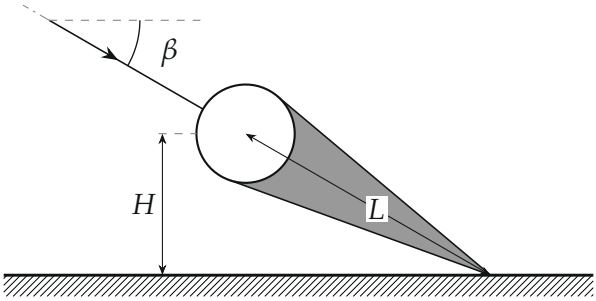


Рисунок 4. Ось тени идёт к земле под углом β к горизонту; вершина конуса тени касается земли.

$$\frac{H}{\sin\beta} \le L \quad \Rightarrow \quad H_{\max} = L\sin\beta = \frac{2R}{\alpha}\sin\beta,$$

$$H_{\max} = \frac{2\cdot 5{,}0}{9{,}3\cdot 10^{-3}}\cdot 0{,}5\text{ м} \approx 5{,}4\cdot 10^2\text{ м}.$$

Выше этой высоты на землю падает только полутень: на ней нет тёмного пятна, видно лишь слабое затемнение.

Пункт 4. Схема Юнга и размер источника. Точки диска Солнца излучают независимо друг от друга, поэтому каждая точка даёт на экране собственную картину полос, а на экране складываются интенсивности. Чтобы понять, насколько картины сдвинуты друг относительно друга, найдём разность хода от точки диска до двух отверстий.

Точка S_0 в центре диска лежит на оси симметрии, расстояния до отверстий A_1, A_2 равны, разность хода равна нулю. Точка S_1 на краю диска (радиус Солнца R, расстояние до экрана L) даёт

$$r_1^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} + R\right)^2, \qquad r_2^2 = L^2 + \left(\frac{d}{2} - R\right)^2.$$

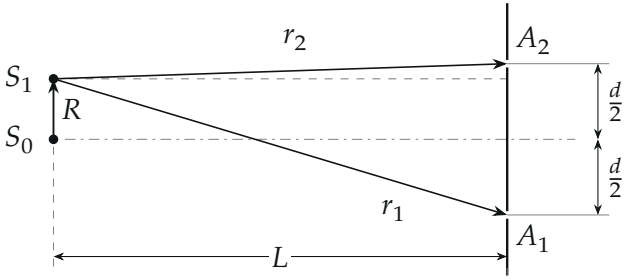


Рисунок 5. Схема Юнга: S_0 — центр диска Солнца, S_1 — точка на его краю, A_1 и A_2 — отверстия в экране. Размеры не в масштабе.

Вычтем первое равенство из второго: $r_1^2 - r_2^2 = 2Rd$. С другой стороны, $r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \approx 2L\,(r_1 - r_2)$, потому что $R \ll L$ и сумма расстояний почти равна $2L$. Отсюда разность хода от края диска

$$\Delta r = r_1 - r_2 = \frac{Rd}{L}.$$

У диаметрально противоположной точки она та же по модулю, но с другим знаком, поэтому от одного края диска до другого разность хода меняется на

$$(\Delta r)_{\max} = \frac{2Rd}{L} = \alpha d,$$

потому что $2R/L = \alpha$ — тот же угловой размер Солнца. Если разделить разность хода на λ, получим, на сколько полос сдвигается картина:

$$m = \frac{\alpha d}{\lambda}.$$

Пока $m \ll 1$, картины от всех точек диска почти совпадают, и полосы чёткие. Когда картина от края сдвигается на целую полосу ($m = 1$), максимумы одних точек попадают на минимумы других, и полосы стираются (рисунок 6). Предельное расстояние между отверстиями:

$$\alpha d = \lambda \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{550 \cdot 10^{-9}}{9{,}3 \cdot 10^{-3}}\ \text{м} \approx 5{,}9 \cdot 10^{-5}\ \text{м} \approx 0{,}06\ \text{мм}.$$

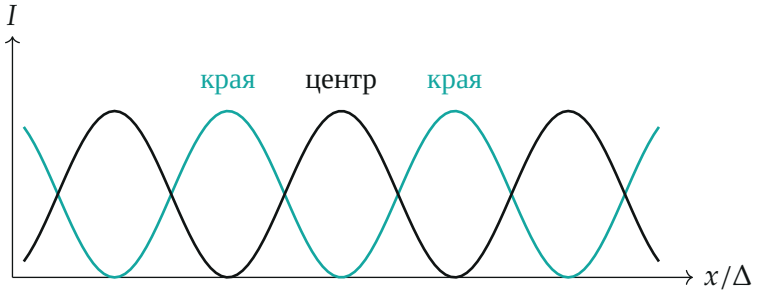


Рисунок 6. Интенсивность на экране: чёрная кривая — картина от центра диска, бирюзовая — от двух противоположных краёв при $m = 1$ (картины от краёв сдвинуты на одну полосу, поэтому совпадают друг с другом). Δ — ширина полосы; максимумы одной картины приходятся на минимумы другой.

Обратите внимание: условие «сдвиг ровно на одну полосу» — оценка по порядку величины; точный расчёт для равномерно светящегося диска даёт множитель 1,22 в этой формуле, то есть тот же порядок.

Проверка. Пункт 2: интенсивность в изображении не может превышать интенсивность у поверхности Солнца $A\,(2/\alpha)^2 \approx 5{,}5\cdot 10^7$ Вт/м^2; у нас $2{,}2\cdot 10^6$ Вт/м^2, противоречия нет (равенство было бы при $D/F = 2$). Пункт 3: для Луны ($R = 1{,}74\cdot 10^6$ м) формула даёт $L = 2R/\alpha \approx 3{,}7\cdot 10^8$ м — почти расстояние до Земли ($3{,}8\cdot 10^8$ м): тень Луны едва достигает Земли, и полные затмения бывают, когда Луна ближе к Земле, чем обычно.

Ответ. 1) $L = d/\alpha \approx 0{,}54$ м (не дальше); 2) $I = A\,(D/\alpha F)^2 \approx 2{,}2\cdot 10^6$ Вт/м^2; 3) $H_{\max} = \dfrac{2R}{\alpha}\sin\beta \approx 5{,}4\cdot 10^2$ м; 4) $d < \lambda/\alpha \approx 5{,}9\cdot 10^{-5}$ м $\approx 0{,}06$ мм.