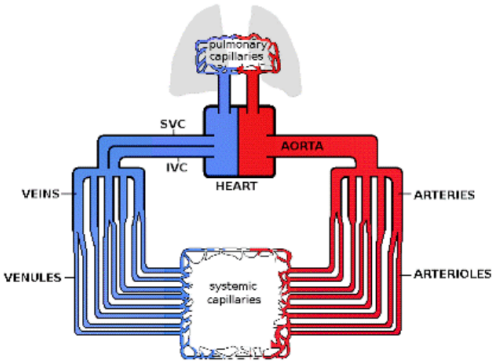
# Гемодинамика – артериальная система

**Задача 1.** [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 11 класс, задача 3]




Гемодинамика — движение крови по сосудам, возникающее вследствие разности гидростатического давления в различных участках кровеносной системы.

На рисунке (заставка): pulmonary capillaries — лёгочные капилляры; SVC — верхняя полая вена; IVC — нижняя полая вена; AORTA — аорта; HEART — сердце; VEINS — вены; VENULES — венулы; ARTERIES — артерии; ARTERIOLES — артериолы; systemic capillaries — капилляры большого круга.

При расчёте характеристик движения крови по сосудам будем использовать следующие упрощения:

- все сосуды являются цилиндрическими, их форма остаётся неизменной при изменении давления крови; стенки сосудов не проницаемы для крови;
- распределение давлений внутри кровеносной системы стационарно, т. е. не зависит от времени, иными словами вместо регулярных пульсаций, обусловленных сжатием сердца, рассматриваем усреднённое по времени распределение давлений, давление, создаваемое сердцем, также считаем постоянным;

- объём крови, протекающий в единицу времени через поперечное сечение (эта величина часто называется расход жидкости — $q$) цилиндрической трубы радиуса $R$ и длины $L$, описывается формулой Пуазейля:

$$q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P, \qquad (1)$$

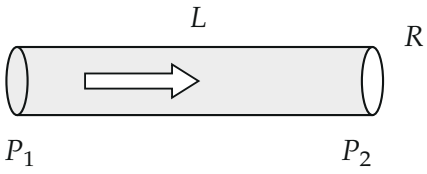
где $\Delta P$ — разность давлений на концах трубы, $\eta$ — коэффициент вязкости протекающей жидкости, если жидкость идеальная (в которой силами вязкого трения пренебрегают), то $\eta = 0$; можно считать, что формула (1) применима и для изогнутых труб;
- кровь является несжимаемой вязкой жидкостью, плотность которой $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м$^3$; вязкость крови $\eta = 4{,}0 \cdot 10^{-3}$ Па·с;
- суммарный расход крови в большом круге кровообращения равен $q_0 = 6{,}0$ л/мин;
- давление в 1 мм рт. ст. равно 133 Па.

Артериальная система человека (по которой кровь поступает от сердца к мышцам и другим органам) состоит из системы разветвляющихся сосудов: аорта, крупные артерии, мелкие артерии, капилляры. Будем считать, что геометрические размеры всех сосудов в этих группах одинаковы; каждый более крупный сосуд разветвляется в одном месте на более мелкие сосуды (см. рисунок на заставке к задаче). Характеристики сосудов артериальной системы приведены в таблице 1 листов ответов. В этой таблице: $d_i$ — диаметр сосуда, $l_i$ — длина сосуда; $n_i$ — число сосудов данной группы.

| Группа сосудов | $n_i$ | $d_i$ | $l_i$ |
|---|---|---|---|
| 1) Аорта | 1 | 15,3 мм | 60 см |
| 2) Крупные артерии | 43 | 2,5 мм | 47 см |
| 3) Мелкие артерии | 2100 | 0,50 мм | 6,0 см |
| 4) Капилляры | $1{,}7 \cdot 10^9$ | 8,0 мкм | 1,2 мм |

**Часть 1. Предварительные расчёты.**

Жидкость вязкости $\eta$ протекает по цилиндрической трубе радиуса $R$ и длины $L$, расход жидкости равен $q$.



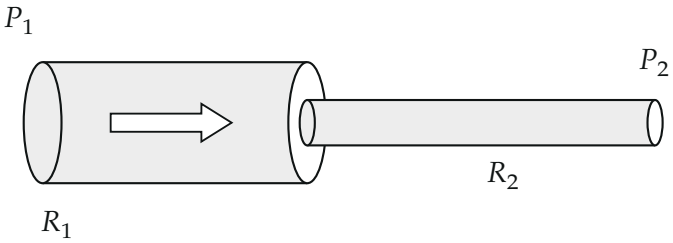

**1.1** Получите формулы, описывающие следующие характеристики движения жидкости:

**1.1.1** среднюю по поперечному сечению скорость течения жидкости;

**1.1.2** среднее время движения порции жидкости по трубе;

**1.1.3** разность давлений жидкости на концах трубы $\Delta P = P_1 - P_2$.

Жидкость протекает по трубе, состоящей из двух сочленённых труб, радиусы которых равны $R_1$ и $R_2$, длины этих труб равны $l_1$ и $l_2$. Плотность жидкости $\rho$, вязкостью жидкости можно пренебречь, $\eta \approx 0$. Расход жидкости равен $q$.



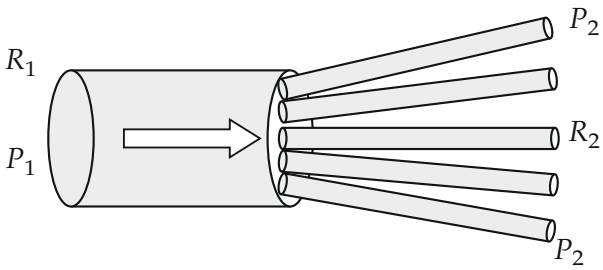

**1.2** Найдите, чему равна разность давлений $\delta P = P_1 - P_2$ на концах трубы. Укажите область, в которой происходит этот скачок давлений.

Далее можете считать, что полученная формула для скачка давления применима и для вязких жидкостей.

По описанной выше сочленённой трубе протекает жидкость, вязкость которой равна $\eta$. На концах трубы поддерживается постоянная разность давлений $\Delta P = P_1 - P_2$.

**1.3** Рассчитайте расход жидкости по этой трубе. Ответ выразите через разность давлений, вязкость жидкости и геометрические размеры трубы.

Жидкость, вязкостью которой можно пренебречь, протекает по системе труб, состоящей из одной трубы радиуса $R_1$ и $n$ одинаковых труб меньшего радиуса $R_2$. Расход жидкости через эту систему (равный расходу в первой трубе) равен $q$.




**1.4** Найдите, чему равен скачок давлений на стыке труб $\delta P = P_1 - P_2$.

Полученную формулу также можно применять для вязкой жидкости.

**Часть 2. Характеристики кровотока в артериальной системе человека.**

Будем считать, что артериальная система заканчивается на середине капилляров (далее начинается венозная система).

**2.1** Используя приведённые в условии данные, рассчитайте для каждой группы сосудов следующие характеристики:

**2.1.1** среднюю скорость течения крови по сосудам этой группы;

**2.1.2** среднее время движения крови по артериальной системе;

**2.1.3** разность давлений на концах сосудов каждой группы (для капилляров — между началом капилляра и его серединой);

**2.1.4** скачки давлений при переходе от одной группы сосудов к следующей;

**2.1.5** общую разность давлений в артериальной системе человека, от входа аорты до середины капилляра.

**2.2** Сравните полученное значение разности давлений со средним сердечным давлением $p \approx 100$ мм рт. ст. Кратко объясните возникшее противоречие — выскажите предположение о том, как всё-таки работает кровеносная система?

▲ **Решение. Что происходит.** Кровь — несжимаемая жидкость, поэтому в любом сечении любой трубы за секунду проходит один и тот же объём $q$. Давление теряется двумя способами. Первый — вязкое трение вдоль трубы: падение давления пропорционально расходу, $\Delta P \propto q$ (Пуазейль). Второй — разгон жидкости при входе в узкую трубу: на стыке труб с разным сечением скорость меняется скачком, кинетическая энергия растёт, и давление падает на величину, пропорциональную $q^2$ (Бернулли). Для артериальной системы нужно сложить обе потери по всем группам сосудов.

**Обозначения.** $S = \pi R^2$ — площадь сечения трубы, $v$ — средняя по сечению скорость; $q_0$ — суммарный расход крови, $q_i = q_0/n_i$ — расход через один сосуд $i$-й группы.

**Часть 1.**

**1.1.** Объём, проходящий через сечение за время $dt$, — цилиндр площади $S$ и длины $v\,dt$, поэтому $q = vS$.

**1.1.1.** Средняя скорость:

$$v = \frac{q}{S} = \frac{q}{\pi R^2}.$$

**1.1.2.** Порция жидкости проходит трубу длиной $L$ за время

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\pi R^2 L}{q} = \frac{V}{q},$$

где $V = \pi R^2 L$ — объём трубы.

**1.1.3.** Из формулы Пуазейля (1):

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4}\, q.$$

**1.2.** При $\eta = 0$ вязких потерь нет: в каждой из труб давление постоянно (формула (1) даёт $\Delta P = 0$), поэтому весь перепад возникает в области стыка двух труб. Найдём его по закону изменения энергии для порции жидкости, лежащей между сечением в широкой трубе и сечением в узкой (рисунок).

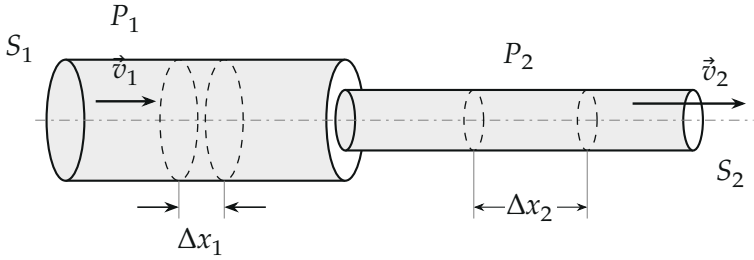



*Рисунок 1. Порция жидкости между двумя сечениями смещается: в широкой трубе на $\Delta x_1$, в узкой на $\Delta x_2$.*

За малое время первое сечение сместилось на $\Delta x_1$, второе — на $\Delta x_2$. Жидкость несжимаема, поэтому объёмы, прошедшие через сечения, равны:

$$\Delta V = S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2.$$

Эта порция объёмом $\Delta V$ как бы «перенесена» из широкой трубы, где она текла со скоростью $v_1$, в узкую, где она течёт со скоростью $v_2$. Изменение её кинетической энергии равно работе внешних сил, то есть сил давления на сечения: слева сила $P_1 S_1$ действует по направлению перемещения $\Delta x_1$, справа сила $P_2 S_2$ — против перемещения $\Delta x_2$:

$$P_1 S_1 \Delta x_1 - P_2 S_2 \Delta x_2 = \frac{\rho \Delta V}{2} \left( v_2^2 - v_1^2 \right).$$

Подставим $S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2 = \Delta V$ и сократим на $\Delta V$:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} \left( v_2^2 - v_1^2 \right).$$

Это уравнение Бернулли для горизонтальной трубы. Выразим скорости через расход, $v = q/S = q/(\pi R^2)$:

$$\delta P = P_1 - P_2 = \frac{\rho q^2}{2\pi^2} \left( \frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4} \right).$$

Так как $R_2 < R_1$, это положительная величина: в узкой трубе давление ниже. Скачок происходит в области стыка труб.

**1.3.** Вязкая жидкость теряет давление и вдоль каждой трубы, и на стыке. Обозначим давления так, как на рисунке: $P_1$ — в начале широкой трубы, $P_1'$ — в её конце, $P_2'$ — в начале узкой, $P_2$ — в конце.

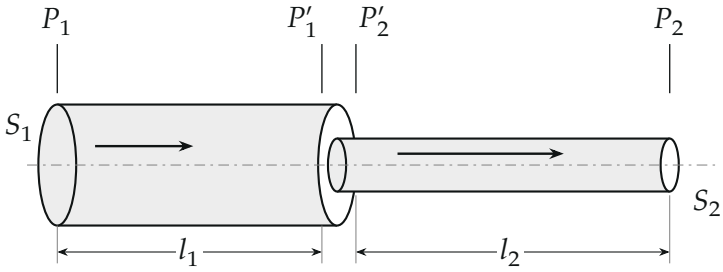



*Рисунок 2. Обозначения давлений на составной трубе.*

Запишем падение давления на каждом из трёх участков: по формуле (1) на трубах и по пункту 1.2 на стыке:

$$P_1 - P_1' = \frac{8\eta l_1}{\pi R_1^4}\,q, \qquad P_1' - P_2' = \frac{\rho q^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right), \qquad P_2' - P_2 = \frac{8\eta l_2}{\pi R_2^4}\,q.$$

Сложим:

$$\Delta P = \frac{\rho q^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right) + \frac{8\eta}{\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4}\right) q.$$

Неизвестным осталось только $q$, и оно входит в квадратном уравнении $a\,q^2 + 2b\,q - \Delta P = 0$, где

$$a = \frac{\rho}{2\pi^2}\left(\frac{1}{R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right), \qquad b = \frac{4\eta}{\pi}\left(\frac{l_1}{R_1^4} + \frac{l_2}{R_2^4}\right).$$

Расход положителен, берём положительный корень:

$$q = \frac{\sqrt{b^2 + a\,\Delta P} - b}{a}.$$

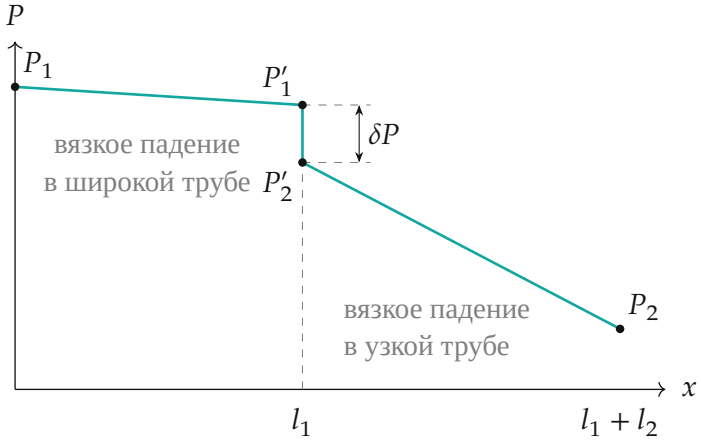



*Рисунок 3. Давление вдоль составной трубы (схематически): плавное вязкое падение в каждой трубе и скачок на стыке.*

**1.4.** Рассуждение пункта 1.2 повторяется, только течение в узкой части идёт по $n$ трубам сразу: вместо $S_2$ в формуле нужна их суммарная площадь $nS_2 = n\pi R_2^2$:

$$\delta P = \frac{\rho q^2}{2}\left(\frac{1}{(nS_2)^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = \frac{\rho q^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2 R_2^4} - \frac{1}{R_1^4}\right).$$

Обратите внимание: при $nR_2^2 > R_1^2$ суммарное сечение растёт, жидкость замедляется, и $\delta P < 0$ — давление при разветвлении повышается. Для кровеносной системы именно так и есть.

**Часть 2.**

Для каждой группы сосудов выпишем формулы пункта 1 с учётом числа сосудов $n_i$. Суммарный расход $q_0 = 6{,}0$ л/мин $= 6{,}0 \cdot 10^{-3}/60$ м$^3$/с $= 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ м$^3$/с делится поровну между $n_i$ параллельными сосудами, поэтому

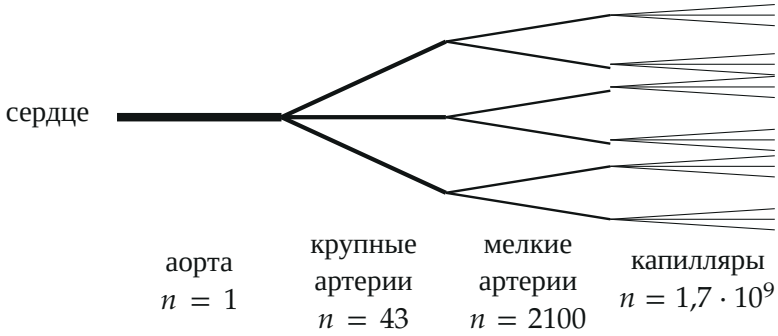



*Рисунок 4. Схема ветвления артериальной системы (число ветвей условное, $n_i$ — по таблице).*

$$q_i = \frac{q_0}{n_i}, \qquad S_i = \frac{\pi d_i^2}{4}, \qquad v_i = \frac{q_i}{S_i}, \qquad t_i = \frac{l_i}{v_i},$$

$$\Delta P_i = \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4}\, q_i = 8\pi\eta\, \frac{l_i}{S_i^2}\, q_i, \qquad \delta P_i = \frac{\rho q_0^2}{2}\left(\frac{1}{(n_{i+1}S_{i+1})^2} - \frac{1}{(n_i S_i)^2}\right).$$

Для капилляров время и разность давлений берём для половины длины, до середины капилляра.

Обратите внимание: скачок $\delta P_i$ при переходе к следующей группе записан через суммарную площадь сечений группы $n_i S_i$, а не через площадь одного сосуда: именно эта величина определяет скорость потока.

Результаты расчёта по этим формулам (с точностью 2–3 значащие цифры):

| Группа | $v_i$, м/с | $t_i$, с | $\Delta P_i$, Па | $\delta P_i$, Па |
|---|---|---|---|---|
| Аорта | 0,54 | 1,10 | 180 | −36 |
| Крупные артерии | 0,47 | 0,99 | 4560 | −83 |
| Мелкие артерии | 0,24 | 0,25 | 7450 | −29 |
| Капилляры (до середины) | 0,0012 | 0,51 | 1400 | – – – |

Здесь для капилляров $v$ — скорость в капилляре, а время и $\Delta P$ — до его середины.

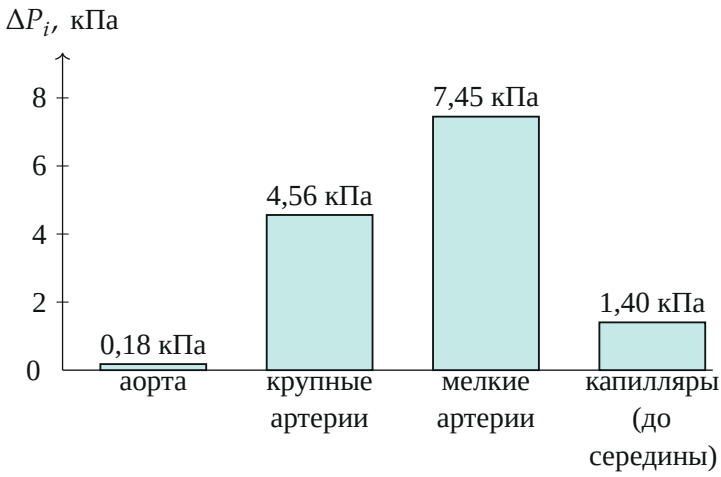



*Рисунок 5. Падение давления вдоль сосудов каждой группы.*

**2.1.2.** Среднее время движения крови по артериальной системе — сумма по группам:

$$t = 1{,}10 + 0{,}99 + 0{,}25 + 0{,}51 = 2{,}9 \text{ с}.$$

**2.1.5.** Общая разность давлений от входа аорты до середины капилляра — сумма падений в сосудах и скачков на стыках:

$$\Delta P = \sum \Delta P_i + \sum \delta P_i = (180 + 4560 + 7450 + 1400) - (36 + 83 + 29) \text{ Па},$$

$$\Delta P \approx 1{,}3 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 101 \text{ мм рт. ст.}$$

Скачки отрицательны (суммарное сечение растёт при каждом ветвлении) и малы по сравнению с вязкими потерями: давление в основном теряется в мелких артериях и капиллярах.

**2.2.** Одной артериальной части хватило, чтобы «съесть» всё сердечное давление $p \approx 100$ мм рт. ст. А ведь кровь потом должна пройти вторую половину капилляров и всю венозную систему. Если считать, что перепад давления в венах такой же, сердце должно создавать вдвое большее давление, чем оно создаёт на самом деле. Значит, модель жёстких трубок с постоянным давлением упрощает слишком сильно: реальные сосуды не жёсткие, а проходят среди мышц, которые при сокраще-

нии сжимают их и подталкивают кровь (в венах — вместе с клапанами). Мышцы работают как дополнительные «микронасосы», и часть работы по прокачиванию крови выполняется не сердцем.

**Проверка.** Размерность: $\rho q^2/S^2$ — кг/м$^3$·м$^6$/с$^2$/м$^4$ = Па; $8\eta l\, q/(\pi R^4)$ — Па·с·м·м$^3$/с/м$^4$ = Па. Второй способ для аорты: $\Delta P = 8\eta l v/R^2 = 8{\cdot}4{\cdot}10^{-3}{\cdot}0{,}6{\cdot}0{,}54/(7{,}65{\cdot}10^{-3})^2 \approx 180$ Па. Предельные случаи формулы для $q$: при $\eta \to 0$ ($b \to 0$) $q = \sqrt{\Delta P/a}$ — течение идеальной жидкости; при $\rho \to 0$ ($a \to 0$) $q \to \Delta P/(2b)$, то есть последовательные трубы по Пуазейлю. Согласованность времени: суммарный объём артериальной системы до середины капилляров $\sum n_i S_i l_i \approx 0{,}29$ л, и $t = V/q_0 = 2{,}9$ с.

**Ответ.** 1.1.1) $v = \dfrac{q}{\pi R^2}$; 1.1.2) $t = \dfrac{\pi R^2 L}{q}$; 1.1.3) $\Delta P = \dfrac{8\eta L}{\pi R^4}\, q$; 1.2) $\delta P = \dfrac{\rho q^2}{2\pi^2}\left(\dfrac{1}{R_2^4} - \dfrac{1}{R_1^4}\right)$, скачок происходит в области стыка труб; 1.3) $q = \dfrac{\sqrt{b^2 + a\Delta P} - b}{a}$, $a = \dfrac{\rho}{2\pi^2}\left(\dfrac{1}{R_2^4} - \dfrac{1}{R_1^4}\right)$, $b = \dfrac{4\eta}{\pi}\left(\dfrac{l_1}{R_1^4} + \dfrac{l_2}{R_2^4}\right)$; 1.4) $\delta P = \dfrac{\rho q^2}{2\pi^2}\left(\dfrac{1}{n^2 R_2^4} - \dfrac{1}{R_1^4}\right)$; 2.1) $v = 0{,}54;\ 0{,}47;\ 0{,}24;\ 0{,}0012$ м/с, $t \approx 2{,}9$ с, $\Delta P_i = 180;\ 4560;\ 7450;\ 1400$ Па, $\delta P_i = -36;\ -83;\ -29$ Па, $\Delta P \approx 1{,}3{\cdot}10^4$ Па $\approx 101$ мм рт. ст.; 2.2) одной артериальной системы хватает на всё сердечное давление; вдвое большее требуемое давление объясняется работой мышц как «микронасосов».