Термометр Галилея

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 9 класс, задача 1] Термометр Галилея — запаянный стеклянный цилиндр, наполненный жидкостью, в которой плавают стеклянные сосудики-буйки. К каждому такому сферическому поплавку прикреплена снизу золотистая или серебристая бирка с выбитым на ней значением температуры. В зависимости от размера термометра количество поплавков внутри бывает от 3 до 11. В настоящее время термометр представляет эстетическую ценность в качестве эффектного предмета интерьера.

При изменении температуры изменяются плотности жидкости и материала поплавков. Поэтому изменяются условия плавания поплавков — они могут либо тонуть, либо всплывать. Конечно, точно измерять температуру с помощью этого термометра невозможно, но детали прибора должны быть изготовлены с высокой точностью. В данной задаче вам необходимо рассчитать характеристики этой забавной игрушки.



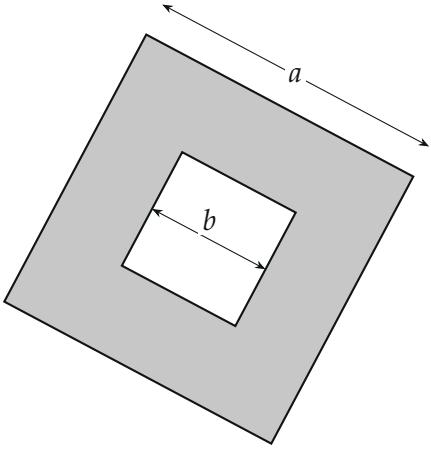
Часть 1. Тепловое расширение.

При нагревании тела все его линейные размеры изменяются одинаково. Во многих случаях относительное изменение размеров тела пропорционально изменению температуры и описывается формулой

$$l = l_0(1 + \alpha(t - t_0)), \qquad (1)$$

где l — длина тела при температуре t, l_0 — длина тела при температуре t_0, α — коэффициент линейного расширения вещества, из которого изготовлено тело. По аналогичному закону изменяются все линейные размеры тела.

1.1 Квадратная металлическая пластина изготовлена из металла с коэффициентом теплового расширения α. В середине пластины проделано квадратное отверстие. При температуре t_0 длина стороны внешнего квадрата равна a, длина стороны отверстия — b. Пластину нагревают на Δt градусов. Укажите, что произойдёт с площадью отверстия (увеличится, уменьшится, не изменится). Если площадь отверстия изменится, то найдите её изменение ΔS.



Изменение плотности однородного тела может быть описано формулой

$$\rho = \rho_0(1 + \gamma(t - t_0)), \qquad (2)$$

где ρ — плотность тела при температуре t, ρ_0 — плотность при температуре t_0, γ — тепловой коэффициент изменения плотности вещества, из которого изготовлено тело.

1.2 Выразите коэффициент теплового изменения плотности γ через коэффициент линейного расширения α. Считайте эти коэффициенты малыми.

Часть 2. Массы поплавков.

Здесь и далее будем считать, что сосуд термометра Галилея заполнен дистиллированной водой. Тепловое расширение воды носит сложный характер и не подчиняется линейным законам (1) и (2). В таблице 1 приведены значения удельного объёма воды v_0 при различных температурах t. Удельным объёмом называется объём единицы массы вещества. Будем считать, что поплавки являются полыми стеклянными шариками, диаметр которых при температуре $t_0 = 20{,}0°$ равен $D = 2{,}000$ см. Шарики частично заполнены подкрашенной водой, масса каждого шарика-поплавка (вместе с водой внутри) равна $m_0 = 4{,}000$ г. К шарикам подвешивают золотую бирку с выбитым значением температуры. Плотность золота при температуре $t_0 = 20{,}0°$ равна $\rho_1 = 19{,}32$ г/см^3.

Назовём температурой всплытия t^* поплавка такую температуру, при которой поплавок (с биркой) может находиться в состоянии равновесия внутри жидкости. Именно эту температуру указывает на бирках поплавков.

t, °C	v_0, см^3/г	m_1, г	Δm_1, г
15	1,000871		
20	1,001773		
25	1,002939		
30	1,004349		
35	1,005975		

2.1 Поплавок находится внутри жидкости, находящейся при температуре всплытия. Что произойдёт с шариком (начнёт тонуть, начнёт всплывать, останется в равновесии), если температура повысится?

2.2 На бирках поплавков указаны температуры всплытия. При некоторой температуре часть шариков плавает у поверхности, часть затонула. Как определить температуру термометра по числам, указанным на бирках? Как оценить погрешность измерения температуры в этом случае?

Для предварительного расчёта пренебрежём тепловым расширением стекла поплавка и золота бирки.

2.3 Для каждого значения температуры, приведённой в таблице 1, рассчитайте значение массы бирки m_1, чтобы для этого поплавка указанная температура была температурой всплытия.

При проведении испытаний оказалось, что термометр имеет систематическую погрешность. Для её исправления разработчики решили учесть тепловое расширение стекла, из которого изготовлены поплавки, а тепловым расширением золота по-прежнему пренебрегать. Коэффициент линейного теплового расширения стекла равен $\alpha = 9{,}200 \cdot 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$.

2.4 Рассчитайте, на сколько надо изменить массу Δm_1 каждой бирки, чтобы исключить погрешность прибора.

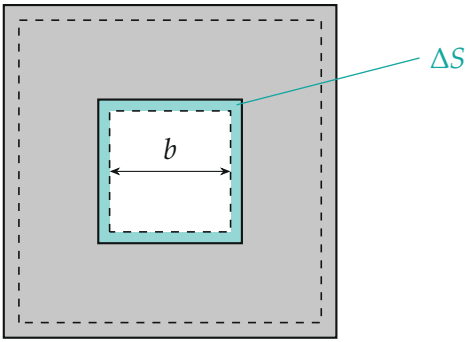
2.5 Рассчитайте общую массу золота, которая пойдёт на изготовление термометра с 5 поплавками, рассчитанными на температуры, указанные в таблице 1.

▲ **Решение. Что происходит.** В первой части нужны два следствия одного факта: при нагревании все линейные размеры тела растут в одно и то же число раз. Из него следуют и изменение площади отверстия, и изменение плотности. Во второй части поплавок плавает, пока сила тяжести поплавка с биркой равна силе Архимеда. Плотность воды зависит от температуры, поэтому равенство выполняется только при одной температуре, и её выбивают на бирке. Масса бирки подбирается так, чтобы равенство сил выполнялось именно при нужной температуре.

Обозначения. $\Delta t = t - t_0$; m_1 — масса бирки; $V_\text{ш} = \dfrac{\pi D^3}{6}$ — объём шарика (бирка своим объёмом тоже вытесняет воду); v_0 — удельный объём воды при температуре всплытия, плотность воды $\rho_\text{в} = 1/v_0$.

Часть 1. Тепловое расширение.

1.1. Нагретая пластина расширяется как единое целое, словно отверстие заполнено тем же металлом и оно тоже растёт вместе с пластиной. Поэтому сторона отверстия растёт так же, как любой другой линейный размер, и отверстие *увеличивается*. Это не очевидно с первого взгляда: кажется, что металл должен «наползать» на отверстие. Но металл расширяется во все стороны, в том числе и от краёв отверстия.



Штрих — контуры до нагрева, сплошные линии — после (расширение преувеличено). Бирюзовая полоска — прирост площади отверстия ΔS.

До нагрева площадь отверстия равна b^2, после нагрева сторона стала $b(1+\alpha\Delta t)$. Тогда

$$\Delta S = \big(b(1+\alpha\Delta t)\big)^2 - b^2 = 2b^2\alpha\Delta t + b^2\alpha^2\Delta t^2 \approx 2b^2\alpha\Delta t.$$

Последнее слагаемое содержит произведение двух малых величин ($\alpha\Delta t \ll 1$) и отброшено. Размер a внешней стороны в ответ не входит: отверстию безразлично, какой величины пластина вокруг него.

1.2. Возьмём куб с ребром a_0 из этого материала. Его ребро растёт по закону (1): $a = a_0(1+\alpha\Delta t)$. Объём куба

$$V = a^3 = a_0^3(1+\alpha\Delta t)^3 \approx V_0(1+3\alpha\Delta t),$$

здесь отброшены члены с α^2 и α^3. Масса тела при нагревании не меняется, поэтому

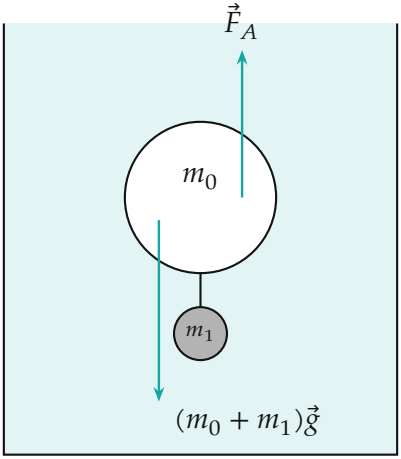
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1+3\alpha\Delta t)} \approx \frac{m}{V_0}(1-3\alpha\Delta t) = \rho_0(1-3\alpha\Delta t),$$

использовано приближение $\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$ при $|x| \ll 1$. Сравнивая с формулой (2), получаем $\gamma = -3\alpha$. Знак минус отражает то, что плотность при нагревании падает.

Часть 2. Массы поплавков.

На поплавок действуют две вертикальные силы: сила тяжести (m_0 +

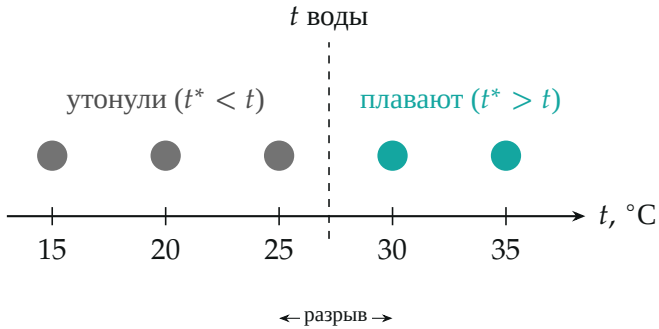
$m_1)g$ и сила Архимеда $F_A = \rho_в V g$, где V — объём всего поплавка вместе с биркой.



Поплавок с биркой в воде: тяжесть и сила Архимеда.

2.1. При температуре всплытия $F_A = (m_0 + m_1)g$. При нагревании плотность воды $\rho_в$ уменьшается (удельный объём v_0 в таблице растёт). Объём поплавка при этом почти не меняется, поэтому F_A становится меньше силы тяжести, и шарик *начнёт тонуть*. Если температуру понизить, плотность воды вырастет, и поплавок начнёт всплывать.

2.2. По пункту 2.1 поплавок, у которого температура на бирке t^* больше температуры воды t, всплыл (вода холоднее, значит плотнее, чем нужно для равновесия), а у которого $t^* < t$ — утонул. Поэтому температура воды лежит между наибольшей температурой на бирках всплывших поплавков и наименьшей на бирках затонувших, в *разрыве* между ними.



Пример: при воде около 27 °C утонули поплавки с бирками 15, 20, 25, плавают с бирками 30 и 35. Числа 27 и разрыв 25–30 *взяты условно.*

Лучшая оценка — середина разрыва, погрешность — его полуширина:

$$t \approx \frac{t^*_{\text{плав}} + t^*_{\text{утон}}}{2}, \qquad \delta t = \frac{t^*_{\text{плав}} - t^*_{\text{утон}}}{2},$$

где $t^*_{\text{плав}}$ — наименьшая температура на бирках всплывших, $t^*_{\text{утон}}$ — наибольшая на бирках затонувших. В примере $t \approx 27{,}5\,^\circ\text{C}$, $\delta t = 2{,}5\,^\circ\text{C}$: настоящая температура может быть где угодно внутри разрыва.

2.3. Условие равновесия при температуре всплытия: $(m_0 + m_1)g = F_A = \rho_\text{в} V g = \dfrac{Vg}{v_0}$. Объём поплавка — объём шарика плюс объём золотой бирки m_1/ρ_1:

$$m_0 + m_1 = \frac{1}{v_0}\left(\frac{\pi D^3}{6} + \frac{m_1}{\rho_1}\right).$$

Это уравнение линейно по m_1. Собираем члены с m_1 слева:

$$m_1\left(1 - \frac{1}{\rho_1 v_0}\right) = \frac{1}{v_0}\frac{\pi D^3}{6} - m_0 \quad \Longrightarrow \quad m_1 = \frac{\dfrac{1}{v_0}\dfrac{\pi D^3}{6} - m_0}{1 - \dfrac{1}{\rho_1 v_0}}.$$

Численно $\dfrac{\pi D^3}{6} = 4{,}1888$ см^3. При $t = 20°$: числитель $\dfrac{4{,}1888}{1{,}001773} -$

4,000 = 0,18138 г, знаменатель $1 - \dfrac{1}{19{,}32 \cdot 1{,}001773} = 0{,}94834$, откуда $m_1 = 0{,}1913$ г. Остальные температуры считаются так же (таблица ниже).

2.4. Если учесть расширение стекла, то диаметр шарика при $t \neq t_0$ равен $D(1+\alpha\Delta t)$, а объём шарика — $\dfrac{\pi D^3}{6}(1+3\alpha\Delta t)$ (как в 1.2). Меняется только объём шарика, поэтому в формуле для m_1 он умножается на $(1+3\alpha\Delta t)$:

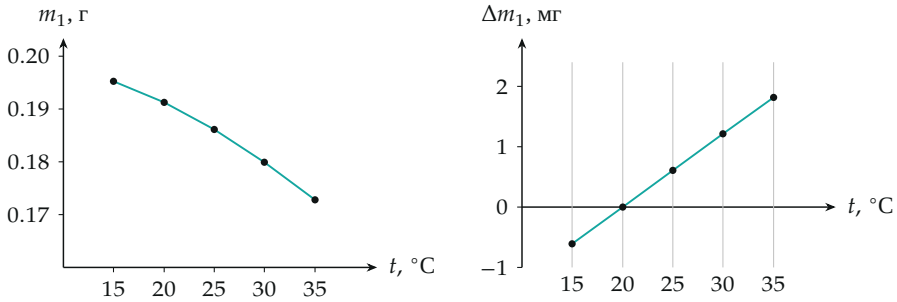
$$m_1' = \frac{\dfrac{1}{v_0}\dfrac{\pi D^3}{6}(1+3\alpha(t-t_0)) - m_0}{1 - \dfrac{1}{\rho_1 v_0}}.$$

Вычитая прежнее значение, получаем нужную поправку

$$\Delta m_1 = m_1' - m_1 = \frac{\dfrac{\pi D^3}{6v_0}3\alpha(t-t_0)}{1 - \dfrac{1}{\rho_1 v_0}}.$$

При $t > t_0$ шарик расширяется, вытесняет больше воды и поэтому выдерживает бирку тяжелее ($\Delta m_1 > 0$); при $t < t_0$ — наоборот.

t, °C	v_0, см^3/г	m_1, г	Δm_1, мг
15	1,000871	0,1952	−0,609
20	1,001773	0,1913	0,000
25	1,002939	0,1861	0,608
30	1,004349	0,1799	1,214
35	1,005975	0,1728	1,817



Слева — масса бирки $m_1(t)$, справа — поправка $\Delta m_1(t)$ на расширение стекла (почти линейна по t).

2.5. Золото для пяти бирок — это сумма исправленных масс $m_1 + \Delta m_1$ по всем пяти температурам. Сумма m_1 равна $0{,}1952 + 0{,}1913 + 0{,}1861 + 0{,}1799 + 0{,}1728 = 0{,}9253$ г, сумма поправок $-0{,}609 + 0 + 0{,}608 + 1{,}214 + 1{,}817 = 3{,}03$ мг $= 0{,}0030$ г. Итого $0{,}9253 + 0{,}0030 = 0{,}9284$ г (в официальном решении указано 0,922 г, это не сходится ни с суммой m_1, ни с исправленной суммой).

Обратите внимание. Бирка тоже вытесняет воду, поэтому m_1 входит в уравнение и слева (вес), и справа (объём): забыв m_1/ρ_1 в объёме, получим $m_1 = \dfrac{V_\text{ш}}{v_0} - m_0$, на несколько процентов больше верного. И ещё: общая масса золота считается по исправленным массам $m_1 + \Delta m_1$, а не по m_1.

Проверка. Размерность m_1: $\dfrac{1}{v_0}V$ — это (г/см^3)·см^3 = г, знаменатель безразмерен. Предел $\rho_1 \to \infty$ (бирка без объёма): $m_1 = \dfrac{V_\text{ш}}{v_0} - m_0$ — «разность выталкиваемой массы воды и массы шарика», как и должно быть. Знак: при росте температуры v_0 растёт, масса вытесненной воды V/v_0 падает, поэтому m_1 убывает с t (график слева). Второй способ для 20°: масса воды в объёме шарика 4,1814 г, на бирку остаётся 0,1814 г; золото той же массы вытесняет ещё 0,0094 г воды, поэтому $m_1 = 0{,}1814/0{,}9483 \approx 0{,}1913$ г — совпало.

Смысл. Поплавок — чувствительный к плотности воды ареометр, а температуру кодирует масса бирки. Поправка на стекло всего $\sim 10^{-3}$

массы бирки: стекло почти не расширяется, но у «ювелирного» прибора считается и она.

Ответ. 1.1) площадь отверстия увеличится, $\Delta S \approx 2b^2\alpha\Delta t$; 1.2) $\gamma = -3\alpha$; 2.1) шарик начнёт тонуть; 2.2) t — середина разрыва между наибольшей t^* среди всплывших и наименьшей t^* среди затонувших поплавков, погрешность — полуширина разрыва; 2.3) $m_1 = (\frac{\pi D^3}{6v_0} - m_0)/(1 - \frac{1}{\rho_1 v_0})$: 0,195; 0,191; 0,186; 0,180; 0,173 г для 15 … 35°; 2.4) $\Delta m_1 = \frac{\pi D^3}{6v_0}\, 3\alpha(t - t_0)/(1 - \frac{1}{\rho_1 v_0})$: −0,61; 0; 0,61; 1,21; 1,82 мг; 2.5) $m \approx 0{,}928$ г.