Как измеряли Вселенную

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 9 класс, задача 2] Данное задание состоит из 4 связанных между собой задач. В задаче используется современная система единиц. Во всех частях задания обязательно сделайте рисунки, поясняющие Ваши расчёты.

Часть 1. Радиус Земли.

Моряк, находящийся на мачте на высоте $h = 10$ м над уровнем моря, увидел свет маяка высотой $h = 10$ м над уровнем моря на расстоянии $L = 22{,}5$ км.

1.1 Рассчитайте по приведённым данным радиус Земли.

Часть 2. Плотность Земли.

Впервые гравитационную постоянную G, входящую в закон всемирного тяготения Ньютона, измерил в 1798 году британский физик-экспериментатор Генри Кавендиш. Он же впервые рассчитал среднюю плотность Земли. По современным данным она равна $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$. Во времена Г. Кавендиша численное значение ускорения свободного падения на поверхности Земли было известно (считайте, что $g = 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$).



2.1 Используя приведённые данные, рассчитайте среднюю плотность Земли.

Часть 3. Расстояние до Луны.

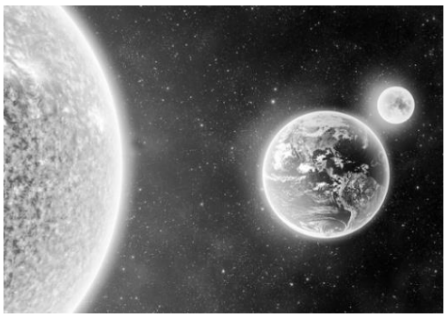
Легко измерить время между двумя последовательными полнолуниями, оно равно 29,5 суток. Длительность земного года примем равной 365,25 суток. Считайте, что орбиты Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли являются окружностями, лежащими в одной плоскости.



3.1 Рассчитайте среднее расстояние от Земли до Луны.

Часть 4. Масса Солнца.

В настоящее время расстояния до ближайших небесных тел измеряют с высокой точностью с помощью радиолокации. По данным измерений свет распространяется от Земли до Солнца и обратно за время $\tau = 16{,}7$ мин. Скорость света в вакууме равна $c = 3{,}00 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.



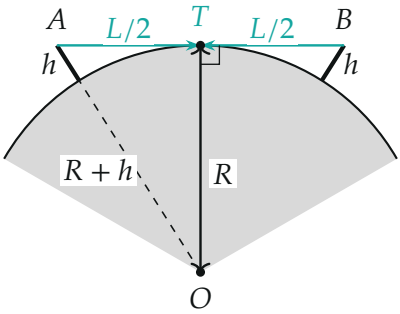
4.1 Рассчитайте по приведённым данным массу Солнца.

▲ **Решение. Что происходит.** Задание — цепочка: геометрия даёт радиус Земли, закон всемирного тяготения превращает его в массу и плотность Земли, а тот же закон вместе с вторым законом Ньютона для кругового движения даёт радиус орбиты Луны и массу Солнца. Каждый следующий пункт использует результат предыдущего.

Обозначения. R — радиус Земли; M — масса Земли; $g = 9{,}81$ м/с^2; $\tau_л = 29{,}5$ сут — время между полнолуниями; $T_з = 365{,}25$ сут; $T_л$ — период обращения Луны вокруг Земли относительно далёких звёзд.

Часть 1. Радиус Земли.

1.1. Свет от маяка доходит до моряка по прямой. Самая низкая такая прямая — касательная к поверхности моря. Касаются они в точке T посередине, потому что мачта и маяк одной высоты. Поэтому каждый из отрезков AT и BT равен $L/2$.



Линия видимости касается моря в точке T. Мачта и маяк преувеличены.

Треугольник OTA прямоугольный: радиус OT перпендикулярен касательной. Его гипотенуза $OA = R + h$. По теореме Пифагора

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (R+h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2 \approx 2Rh,$$

слагаемое h^2 отброшено: $h = 10$ м намного меньше R (поправка в ответе порядка $h/2 \sim 5$ м). Тогда

$$R = \frac{L^2}{8h} = \frac{(2{,}25 \cdot 10^4)^2}{8 \cdot 10}\ \text{м} \approx 6{,}3 \cdot 10^6\ \text{м}.$$

Часть 2. Плотность Земли.

2.1. Тело массой m на поверхности Земли притягивается к ней с силой тяготения, и эта сила и есть mg (вращение Земли и её сплюснутость не

учитываем):

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{gR^2}{G}.$$

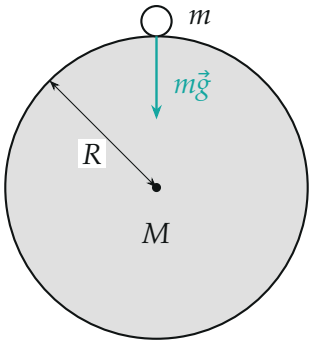
Масса однородного шара равна произведению средней плотности на объём $\frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi GR}.$$

Числа:

$$M = \frac{9{,}81 \cdot (6{,}33 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \approx 5{,}9 \cdot 10^{24}\ \text{кг},$$

$$\rho = \frac{3 \cdot 9{,}81}{4\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}33 \cdot 10^6} \approx 5{,}5 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$



Вес тела у поверхности — сила тяготения Земли.

Часть 3. Расстояние до Луны.

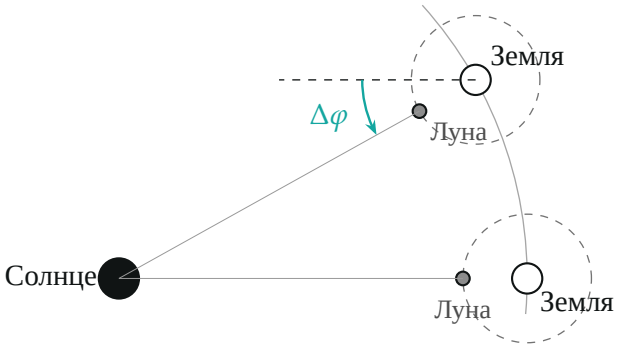
3.1. Луна движется по окружности радиуса r вокруг Земли. Единственная сила — тяготение Земли, она даёт Луне центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона для Луны в проекции на направление к Земле:

$$m_л\omega^2 r = G\frac{m_л M}{r^2}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T_л}.$$

Масса Луны сокращается. Подставив $GM = gR^2$ из части 2, получаем

$$r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T_л^2}{4\pi^2}}.$$

Остаётся найти $T_л$. Время $\tau_л$ между двумя полнолуниями не равно периоду: за это время Земля прошла по орбите угол $\frac{2\pi}{T_з}\tau_л$, и чтобы Луна снова встала на линию Солнце–Земля, ей надо пройти относительно звёзд больше полного оборота.



Два последовательных новолуния. Луна между Землёй и Солнцем. Земля успела пройти угол $\Delta\varphi = 2\pi\tau_л/T_з$ (на рисунке 29°), и направление на Солнце повернулось на тот же угол.

Направление на Солнце за время $\tau_л$ повернулось на угол $\Delta\varphi$, значит Луна по орбите повернулась на $2\pi + \Delta\varphi$:

$$\omega\tau_л = 2\pi + \frac{2\pi}{T_з}\tau_л \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{T_л} = \frac{1}{\tau_л} + \frac{1}{T_з}.$$

Число: $\frac{1}{T_л} = \frac{1}{29{,}5} + \frac{1}{365{,}25} = 0{,}03663$ сут$^{-1}$, $T_л = 27{,}3$ сут $= 2{,}358\cdot10^6$ с (настоящий сидерический месяц, 27,32 сут). Тогда

$$r = \sqrt[3]{\frac{9{,}81\cdot(6{,}33\cdot10^6)^2\cdot(2{,}358\cdot10^6)^2}{4\pi^2}}\ \text{м} \approx 3{,}8\cdot10^8\ \text{м}.$$

Часть 4. Масса Солнца.

4.1. Свет прошёл расстояние до Солнца и обратно, то есть $2R_0$, за время τ:

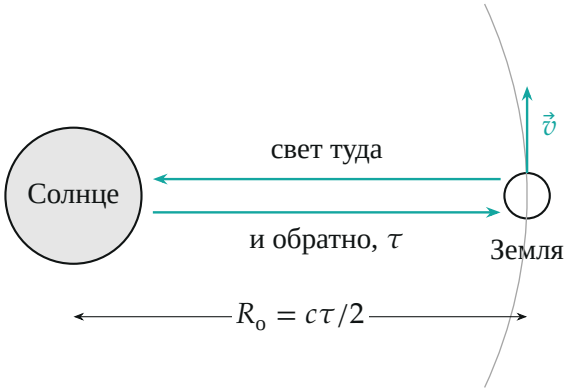
$$R_0 = \frac{c\tau}{2} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \cdot 16{,}7 \cdot 60}{2}\ \text{м} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{м}.$$

Земля движется по орбите радиуса R_0 с периодом $T_з$ под действием тяготения Солнца. Второй закон Ньютона для Земли в проекции на направление к Солнцу (m — масса Земли, $M_\odot$ — масса Солнца):

$$m\left(\frac{2\pi}{T_з}\right)^2 R_0 = G\frac{mM_\odot}{R_0^2} \quad \Longrightarrow \quad M_\odot = \frac{1}{G}\left(\frac{2\pi}{T_з}\right)^2\left(\frac{c\tau}{2}\right)^3.$$

Число: $T_з = 365{,}25 \cdot 86400\ \text{с} = 3{,}156 \cdot 10^7\ \text{с}$, $\dfrac{2\pi}{T_з} = 1{,}991 \cdot 10^{-7}\ \text{с}^{-1}$,

$$M_\odot = \frac{(1{,}991 \cdot 10^{-7})^2 \cdot (1{,}503 \cdot 10^{11})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \approx 2{,}0 \cdot 10^{30}\ \text{кг}.$$



Радиус орбиты Земли из времени пробега света.

Обратите внимание. Радиус Земли из пункта 1.1 используется дальше как $R = 6{,}3 \cdot 10^6$ м, одно и то же значение во всех частях: у организаторов в расчёте расстояния до Луны подставлено $6{,}5 \cdot 10^6$ м, откуда у них $3{,}9 \cdot 10^8$ м. С согласованным радиусом получается $3{,}8 \cdot 10^8$ м.

Проверка. Размерности: под кубическим корнем $(\text{м}/\text{с}^2)\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^2 = \text{м}^3$, то есть r в метрах; в $M_\odot$ единицы G сокращаются с $\text{м}^3/\text{с}^2$, остаются килограммы. Табличные значения: $R_\oplus = 6{,}37\cdot10^6$ м, $\rho = 5{,}5\cdot10^3$ кг/м^3, расстояние до Луны $3{,}84\cdot10^8$ м, $M_\odot = 1{,}99\cdot10^{30}$ кг — всё совпало в пределах 1–2 %.

Смысл. Достаточно измерить на земле длину, время и g (и знать G), чтобы получить размеры и массы небесных тел.

Ответ. 1.1) $R = \dfrac{L^2}{8h} \approx 6{,}3\cdot10^6$ м; 2.1) $\rho = \dfrac{3g}{4\pi GR} \approx 5{,}5\cdot10^3$ кг/м^3 (масса Земли $5{,}9\cdot10^{24}$ кг); 3.1) $r = \sqrt[3]{gR^2T_л^2/4\pi^2}$, $\dfrac{1}{T_л} = \dfrac{1}{\tau_л} + \dfrac{1}{T_з}$, $r \approx 3{,}8\cdot10^8$ м; 4.1) $M_\odot = \dfrac{1}{G}\left(\dfrac{2\pi}{T_з}\right)^2\left(\dfrac{c\tau}{2}\right)^3 \approx 2{,}0\cdot10^{30}$ кг.