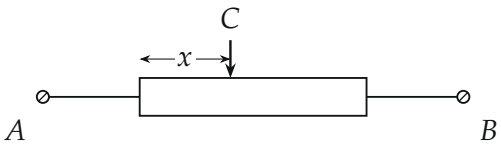
Изменение мощности

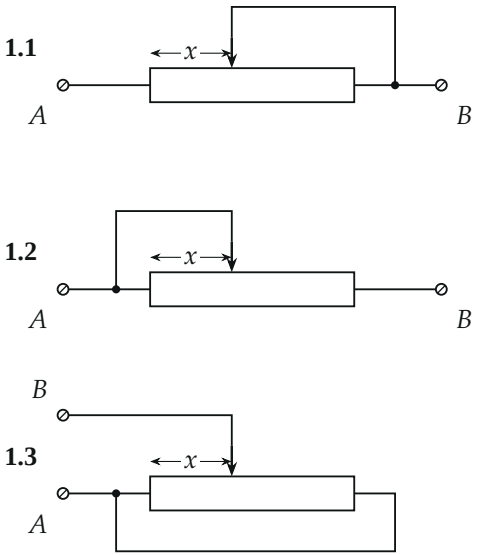
Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2022/23, 9 класс, задача 3] Реостат электроплитки AB изготовлен из однородной проволоки длины l, полное сопротивление которой равно R_0. Положение движка реостата C (средний вывод) описывается длиной участка проволоки $|AC| = x$. Обозначим отношение длины участка AC к длине всей проволоки $z = \dfrac{x}{l}$.



Подключая выводы реостата различными способами, можно изменять электрическое сопротивление между клеммами реостата A и B. Введём величину $r = \dfrac{R_{AB}}{R_0}$, равную отношению сопротивления между клеммами к полному сопротивлению реостата. Электроплитка подключается к источнику постоянного напряжения U_0. Введём величину $p = \dfrac{P_{AB}}{U_0^2} R_0$ — отношение мощности электроплитки при подключении её к клеммам A и B к мощности плитки при подключении полной спирали реостата.

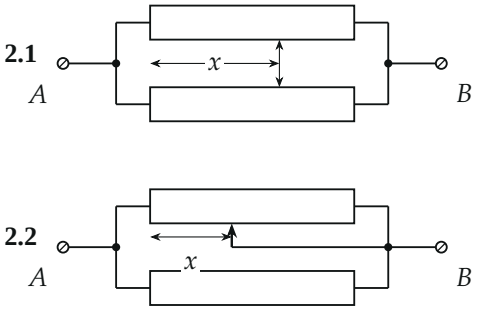
Часть 1. Один реостат.

1.1 – 1.3 На рисунке показаны три различных схемы подключения выводов реостата. Для каждой схемы найдите зависимость величины p от параметра z, определяющего положение среднего вывода. Постройте графики полученных зависимостей на одном рисунке.



Часть 2. Два реостата.

2.1 – 2.2 Приведённые на рисунках схемы включают по 2 одинаковых, описанных выше, реостата. Считайте, что движки реостатов в схеме 2.1 смещаются одинаково (т. е. $x_1 = x_2 = x$). Для каждой схемы найдите зависимость параметра $p = \dfrac{P_{AB}}{U_0^2} R_0$ от параметра $z = \dfrac{x}{l}$.



Часть 3. Нелинейный реостат.

В некоторых устройствах (например, для регулировки громкости звука) используют реостаты, сопротивление которых нелинейно зависит от длины участка $|AC| = x$ и описывается некоторой функцией $R(x)$ (или

$R(z)$). Такой реостат включён в цепь по схеме 1.3. В таблице 1 приведена зависимость сопротивления R_{AB} между клеммами A и B от параметра $z = \dfrac{x}{l}$.

z	R_{AB}, Ом
0,0	0,0
0,1	1,0
0,2	3,8
0,3	8,2
0,4	13,4
0,5	18,8
0,6	23,0
0,7	25,0
0,8	23,0
0,9	15,4
1,0	0,0

3.1 Найдите полное сопротивление реостата R_0.

3.2 Используя данные таблицы 1, рассчитайте значения функции $R(z)$ в заданных точках. Постройте график этой функции.

3.3 Предложите функцию, описывающую рассчитанную зависимость $R(z)$.

3.4 Постройте график зависимости мощности реостата ($p(z) = \dfrac{P(z)}{U_0^2} R_0$) от положения движка $z = \dfrac{x}{l}$.

▲ **Решение. Что происходит.** Движок делит проволоку на две части, сопротивления которых $R_0 z$ и $R_0(1 - z)$. Три способа включения клемм дают разные цепи из этих частей: часть реостата можно выключить, замкнув её накоротко проводом, или соединить части параллельно. Плитка подключена к постоянному напряжению U_0, поэтому её мощность $P = U_0^2 / R_{AB}$, и всё сводится к нахождению сопротивления между клеммами. В третьей части сопротивление движка заранее неизвестно, но по таблице его можно восстановить.

Обозначения. R_{AB} — сопротивление между клеммами, $r = R_{AB}/R_0$,

$$p = \frac{P}{U_0^2} R_0.$$

Связь p и r. При напряжении U_0 мощность $P = \dfrac{U_0^2}{R_{AB}}$, поэтому

$$p = \frac{U_0^2}{R_{AB}} \cdot \frac{R_0}{U_0^2} = \frac{R_0}{R_{AB}} = \frac{1}{r}.$$

Часть 1. Один реостат.

Проволока однородная, поэтому сопротивление участка пропорционально длине: левый участок AC имеет сопротивление $R_0 z$, правый — $R_0(1-z)$.

1.1. Провод от движка идёт к клемме B, и к ней же присоединён правый конец проволоки. Значит, у правого участка оба конца соединены проводом (накоротко): ток по нему не идёт. Между A и B остаётся только левый участок:

$$R_{AB} = R_0 z, \qquad r = z, \qquad p = \frac{1}{z}.$$

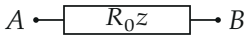
1.2. Теперь провод от движка идёт к клемме A, где уже подключен левый конец проволоки. Накоротко замкнут левый участок, работает правый:

$$R_{AB} = R_0(1-z), \qquad r = 1-z, \qquad p = \frac{1}{1-z}.$$

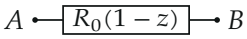
1.3. Клемма A соединена с обоими концами проволоки, клемма B — с движком. Участки $R_0 z$ и $R_0(1-z)$ оказываются включёнными между теми же двумя точками A и B, то есть параллельно:

$$R_{AB} = \frac{R_0 z \cdot R_0(1-z)}{R_0 z + R_0(1-z)} = R_0 z(1-z), \qquad r = z(1-z), \qquad p = \frac{1}{z(1-z)}.$$

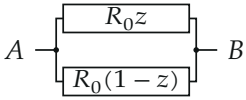
1.1



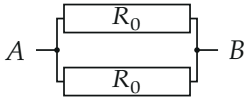
1.2



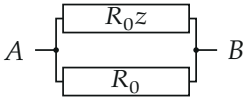
1.3



2.1



2.2



Эквивалентные схемы между клеммами A и B: участки, закороченные проводом, выброшены.

Часть 2. Два реостата.

2.1. Левые концы обоих реостатов присоединены к A, правые — к B, значит, реостаты включены параллельно. Движки одинаково смещены, поэтому соединяющий их провод соединяет точки одного потенциала (схема симметрична: верхний и нижний реостаты одинаковы, на обоих падает одно и то же напряжение), и ток по нему не идёт. Он ничего не меняет:

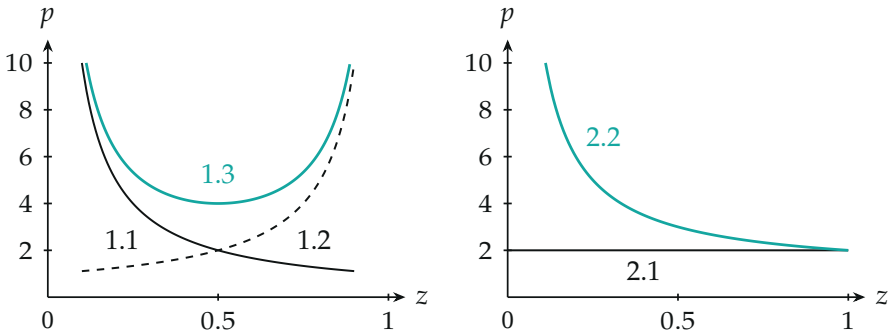
$$R_{AB} = \frac{R_0}{2}, \qquad r = \frac{1}{2}, \qquad p = \frac{1}{r} = 2.$$

Сопротивление не зависит от z: график — горизонтальная прямая $p = 2$. (В официальном решении здесь написано $p = z$; это опечатка: из $r = 1/2$ следует $p = 2$.)

2.2. Провод от движка верхнего реостата идёт к B, и туда же присоединён его правый конец, поэтому правый участок верхнего реостата закорочен, и остаётся участок R_0z. Нижний реостат включён целиком, и он параллелен этому участку:

$$R_{AB} = \frac{R_0z \cdot R_0}{R_0z + R_0} = \frac{R_0z}{1+z}, \qquad r = \frac{z}{1+z}, \qquad p = \frac{1+z}{z} = 1 + \frac{1}{z}.$$

При $z = 1$ движок стоит на правом конце верхнего реостата, обе ветви равны R_0, и $p = 2$, как в схеме 2.1.



Слева — схемы 1.1–1.3, справа — 2.1 и 2.2. Кривые обрезаны на уровне $p = 10$.

Часть 3. Нелинейный реостат.

Схема 1.3: участок AC имеет сопротивление $R(z)$, оставшаяся часть — $R_0 - R(z)$, и они параллельны:

$$R_{AB} = \frac{R(z)(R_0 - R(z))}{R_0}.$$

3.1. Выражение $R(R_0 - R)/R_0$ как функция R — парабола с ветвями вниз, её наибольшее значение достигается при $R = R_0/2$ и равно

$$R_{AB}^{\max} = \frac{\frac{R_0}{2} \cdot \frac{R_0}{2}}{R_0} = \frac{R_0}{4}.$$

В таблице наибольшее $R_{AB} = 25{,}0$ Ом (при $z = 0{,}7$), значит $R_0 = 4 \cdot 25{,}0 = 100$ Ом. Проверка другим способом: $R_{AB}(0{,}6) = R_{AB}(0{,}8) = 23{,}0$ Ом при разных z, а одно значение R_{AB} даёт два корня уравнения, сумма которых равна R_0. Значит $R(0{,}6) + R(0{,}8) = R_0$; ниже получим $36 + 64 = 100$ Ом.

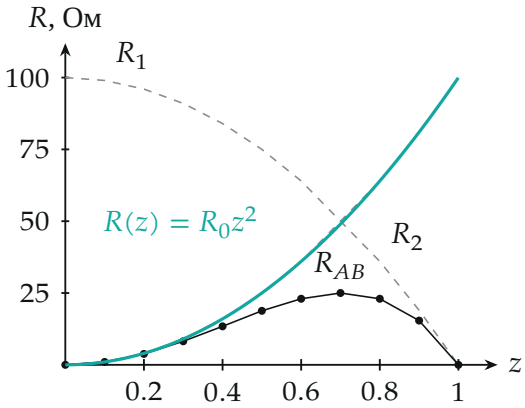
3.2. В безразмерном виде $r_{AB} = \rho(1 - \rho)$, где $\rho = R/R_0$, откуда $\rho^2 - \rho + r_{AB} = 0$ и

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r_{AB}}}{2}, \qquad R_{1,2} = R_0\rho_{1,2}.$$

Для каждого z получаются два корня; их сумма равна R_0. Реальное со-

противление участка проволоки растёт с длиной от 0 при $z = 0$ до R_0 при $z = 1$, поэтому от $z = 0$ до $z = 0{,}7$ берём меньший корень, а после максимума — больший: в точке максимума корни сливаются ($R = R_0/2$), и ветви надо «сшить».

z	R_{AB}, Ом	r_{AB}	R_1, Ом	R_2, Ом	$R(z)$, Ом
0,0	0,0	0,000	100	0	0
0,1	1,0	0,010	99	1	1
0,2	3,8	0,038	96	4	4
0,3	8,2	0,082	91	9	9
0,4	13,4	0,134	84	16	16
0,5	18,8	0,188	75	25	25
0,6	23,0	0,230	64	36	36
0,7	25,0	0,250	50	50	49–50
0,8	23,0	0,230	64	36	64
0,9	15,4	0,154	81	19	81
1,0	0,0	0,000	100	0	100



Пунктир — два корня при каждом z, чёрная ломаная — R_{AB} из таблицы, бирюзовая кривая — сшитая $R(z)$.

3.3. Значения $R(z)$ — это $100 \cdot z^2$: $1 = 100 \cdot 0{,}1^2$, $4 = 100 \cdot 0{,}2^2$, 9, 16, 25, 36, 49 (около 50 в максимуме), 64, 81, 100. Зависимость квадратичная:

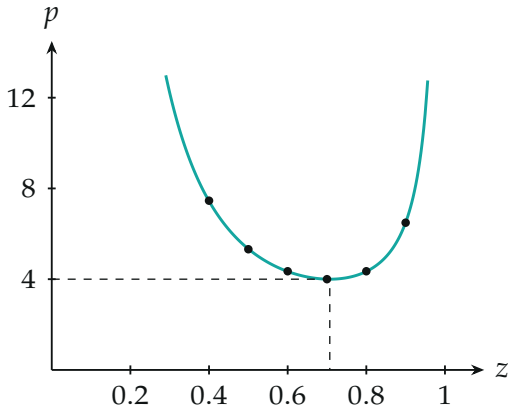
$$R(z) = R_0 z^2.$$

Проверка по таблице: $z = 0{,}2$: $R_{AB} = 4 \cdot 96/100 = 3{,}84 \approx 3{,}8$ Ом; $z = 0{,}9$: $81 \cdot 19/100 = 15{,}4$ Ом — совпадает со всей таблицей.

3.4. Мощность $p = \dfrac{R_0}{R_{AB}} = \dfrac{1}{r}$, где $r = \dfrac{R(z)}{R_0}\left(1 - \dfrac{R(z)}{R_0}\right) = z^2(1 - z^2)$:

$$p(z) = \frac{1}{z^2(1 - z^2)}.$$

Минимум $p = 4$ достигается при $z^2 = \frac{1}{2}$, то есть $z \approx 0{,}71$; при $z \to 0$ и $z \to 1$ сопротивление цепи стремится к нулю, и мощность неограниченно растёт.



Точки — $p = 100/R_{AB}$ по таблице. Кривая уходит вверх при $z \to 0$ и $z \to 1$ (показана до $p \approx 13$).

Обратите внимание. Корень уравнения для $R(z)$ надо выбирать из физических соображений: сопротивление участка проволоки не убывает с ростом его длины. Если взять один корень на всём промежутке, график $R(z)$ получится немонотонным (вернётся к нулю при $z = 1$), что невозможно.

Проверка. Размерности: r и p безразмерны. Предельные случаи: при $z = 1$ схема 1.1 даёт полное сопротивление R_0 и $p = 1$, схема 1.2 — 0 и $p \to \infty$, как и должно быть (движок в конце, правый участок пуст). Схема 2.2 при $z = 1$ совпадает с 2.1. Таблица пункта 3.2 воспроизводится формулой $R_{AB} = R_0 z^2(1 - z^2)$.

Смысл. Сопротивление проводника между двумя точками зависит только от того, какие участки включены в цепь и как они соединены, а участок, закороченный проводом, ток не пропускает вовсе.

Ответ. 1.1) $p = \dfrac{1}{z}$; 1.2) $p = \dfrac{1}{1-z}$; 1.3) $p = \dfrac{1}{z(1-z)}$; 2.1) $p = 2$ (от z не зависит); 2.2) $p = \dfrac{1+z}{z}$; 3.1) $R_0 = 100$ Ом; 3.2) таблица и график выше; 3.3) $R(z) = R_0 z^2$; 3.4) $p(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z^2)}$, график выше.