Цирковая разминка

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 10 класс, задача 1]

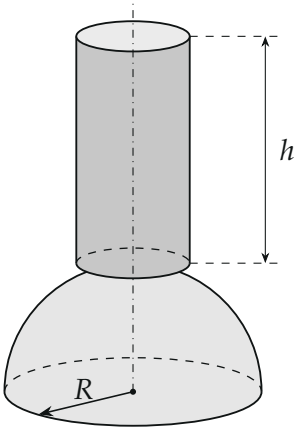
Лист приближённых формул олимпиады (отдельный лист в пакете) содержит: 1. $(1+x)^\gamma \approx 1+\gamma x$ — формула справедлива при любых (целых, дробных, положительных, отрицательных) значениях степени γ. 2. $\sin x \approx x$; $\cos x \approx 1-\dfrac{x^2}{2}$ — аргументы тригонометрических функций должны быть заданы в радианах. 3. $e^x \approx 1+x$. Комментарии: во всех формулах величина x безразмерная и значительно меньше 1: $|x| \ll 1$. Для использования этих формул, прежде всего необходимо привести вашу формулу к стандартному виду, которые даны здесь. В ходе приближенных преобразований соблюдайте правило соблюдения порядка малости: если вы отбрасываете малые величины порядка x^2 и выше — отбрасывайте их сразу в промежуточных выкладках; если вы сохраняете величины определенного порядка, то сохраняйте их во всех преобразованиях.

Это задание состоит из двух не связанных между собой задач.

Задача 1. Девочка на шаре.



Построим предельно упрощенную модель этого изящного циркового номера: первое — считаем, что шар закреплен и неподвижен; второе — считаем девочку сплошным однородным цилиндром; третье — считаем, что трение между поверхностью шара и основанием цилиндра достаточно велико, так, что цилиндр может прокатываться по поверхности шара без проскальзывания. Обозначим радиус шара R, высоту цилиндра h.



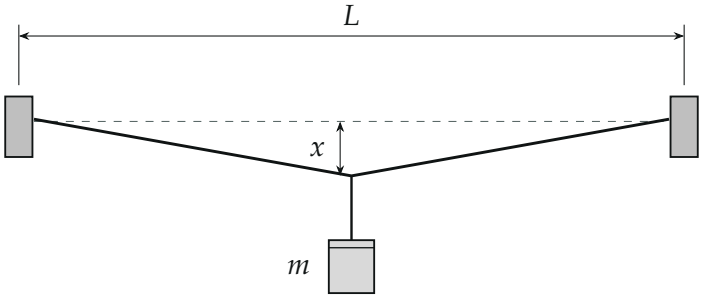
1. Определите, при каких значениях отношения $\frac{h}{R}$ цилиндр может устойчиво стоять вертикально на вершине шара.

Задача 2. Канатоходцы.



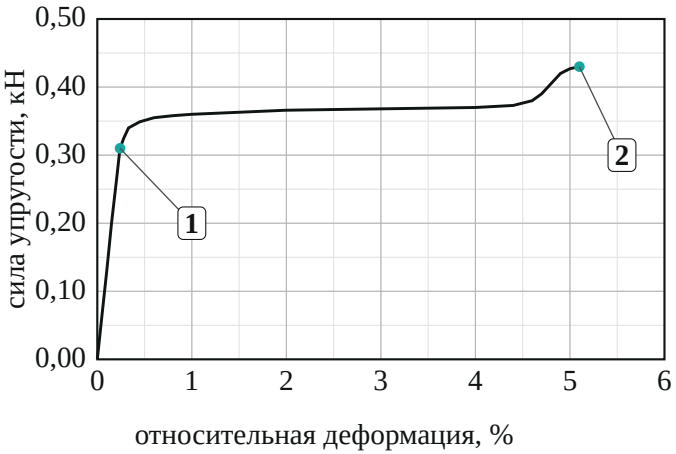
Исполнение этого циркового номера требует серьезной технической подготовки. Для исследования возможности хождения по канату проводится следующий модельный эксперимент.

Медная проволока длины $L = 2{,}0$ м подвешена горизонтально между двумя неподвижными упорами. Массой проволоки и ее натяжением в горизонтальном положении следует пренебрегать. К середине проволоки подвешивают груз массы m. При этом проволока провисает на некоторую величину x.



В ниже приведена диаграмма растяжения проволоки — зависимость силы упругости F, возникающей в проволоке, от ее относительной деформации $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{L}$. Там же приведены значения относительной деформации и соответствующей силы упругости в двух характерных точках. Участок диаграммы 0-1 — линейный (область упругости), точка 2 — точка разрыва. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9{,}8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

№	ε (%)	F (кН)
0	0,00	0,00
1	0,24	0,31
2	5,10	0,43



Используя приведенные данные, рассчитайте:

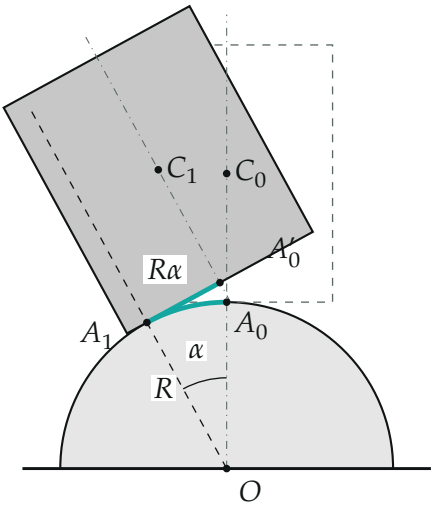
2.1 Величину провисания проволоки x, если масса подвешенного груза равна $m_1 = 2{,}0$ кг.

2.2 Максимальную массу груза m_2, который можно подвесить к этой проволоке (до ее разрыва).

▲ **Решение. Задача 1. Девочка на шаре.**

Что происходит. Вертикальное положение — всегда положение равновесия: сила тяжести проходит через ось цилиндра и центр шара, а реакция опоры направлена по той же прямой. Вопрос в том, вернётся ли цилиндр, если его слегка отклонить. Отклонённый цилиндр катится по шару без проскальзывания, и его центр масс при этом либо поднимается, либо опускается. Поднимается — потенциальная энергия в поле тяжести растёт, это минимум энергии, равновесие устойчиво. Опускается — цилиндр свалится. Главная идея задачи — найти высоту центра масс $H(\alpha)$ при качении и сравнить её с $H(0)$.

Обозначения. O — центр шара; C — центр масс цилиндра, он лежит на оси на расстоянии $h/2$ от основания; A_0 — начальная точка касания (центр основания); α — угол, на который линия OA_1 отклонилась от вертикали; A_1 — новая точка касания; A_0' — центр основания после качения. Высоты считаем от точки O.



Бирюзовые участки — дуга A_0A_1 на шаре и отрезок A_1A_0' на основании — равны $R\alpha$.

1. Качение без проскальзывания. Основание цилиндра остаётся касательной плоскостью к шару в точке A_1, поэтому линия OA_1 перпендикулярна основанию. Проскальзывания нет, значит, длина дуги A_0A_1 на шаре равна длине отрезка A_1A_0' на основании — точек основания, успевших коснуться шара:

$$|A_1A_0'| = R\alpha.$$

Ось цилиндра перпендикулярна основанию и проходит через его центр A_0', поэтому она параллельна OA_1 и сдвинута от неё на $R\alpha$.

2. Высота центра масс. Пройдём от O до C_1 тремя отрезками и сложим их высоты:

- от O до A_1 — длина R под углом α к вертикали, высота $R\cos\alpha$;
- от A_1 до A_0' — длина $R\alpha$ вдоль основания, а основание наклонено к горизонту на тот же угол α, высота $R\alpha\sin\alpha$;
- от A_0' до C_1 — длина $h/2$ вдоль оси, наклонённой к вертикали на α, высота $\dfrac{h}{2}\cos\alpha$.

Отсюда

$$H = \Big(R + \frac{h}{2}\Big)\cos\alpha + R\alpha\sin\alpha,$$

$$\Delta H = H - H(0) = \Big(R + \frac{h}{2}\Big)(\cos\alpha - 1) + R\alpha\sin\alpha.$$

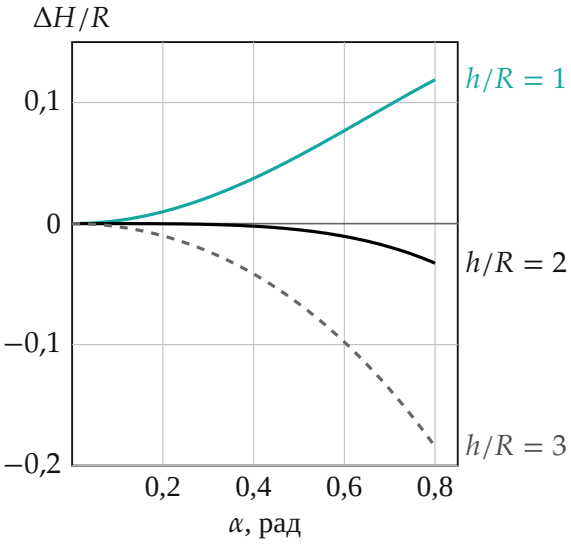
3. Малый угол. Устойчивость определяет знак ΔH при малых α. Воспользуемся $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ и $\sin\alpha \approx \alpha$:

$$\Delta H \approx -\Big(R + \frac{h}{2}\Big)\frac{\alpha^2}{2} + R\alpha^2 = \Big(\frac{R}{2} - \frac{h}{4}\Big)\alpha^2.$$

Обратите внимание: $\cos\alpha - 1$ нельзя заменить нулём, а $\sin\alpha$ в произведении $R\alpha\sin\alpha$ нельзя заменить единицей. Все слагаемые здесь одного порядка, α^2, и отбрасывать их по отдельности нельзя — при этом про-

падает ответ.

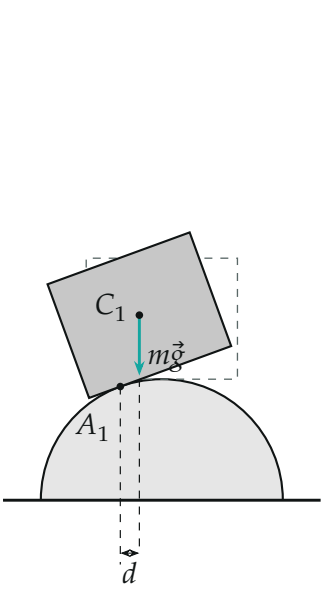
Центр масс поднимается, $\Delta H > 0$, при $\dfrac{R}{2} > \dfrac{h}{4}$, то есть при $h < 2R$.



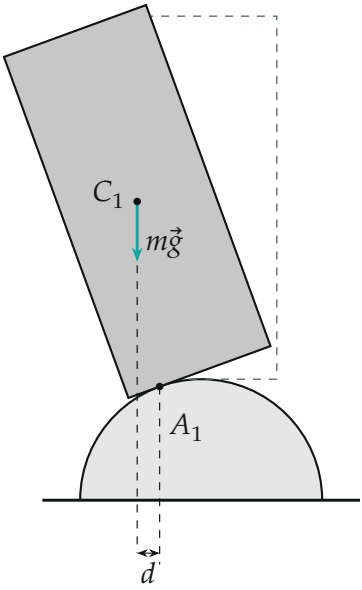
4. Второй способ — моменты. Цилиндр вернётся, если линия действия силы тяжести, проходящая через C_1, пройдёт по ту сторону от точки касания A_1, при которой момент относительно A_1 поворачивает цилиндр к вертикали. Горизонтальное расстояние от A_1 до C_1 равно

$$d = R\alpha\cos\alpha - \frac{h}{2}\sin\alpha \approx \alpha\Big(R - \frac{h}{2}\Big).$$

При $d > 0$ центр масс оказывается с той стороны от точки опоры, куда нужно вернуться, и момент возвращающий; при $d < 0$ — опрокидывающий. Условие $d > 0$ даёт тот же результат $h < 2R$.



$h/R = 1$



$h/R = 3$

Расстояние d от точки касания A_1 до вертикали через C_1. Слева C_1 правее точки касания, момент силы тяжести возвращает цилиндр; справа C_1 левее, момент опрокидывает.

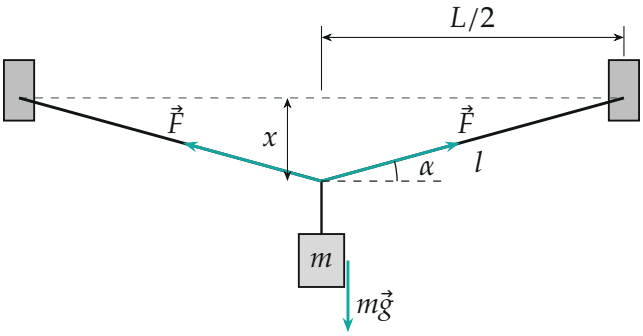
Проверка. Предел $h \to 0$ — плоский диск лежит на шаре: $\Delta H = R\alpha^2/2 > 0$, диск устойчив. Для большого h ($h/R = 3$) получаем $\Delta H \approx -\alpha^2 R/4 < 0$, и на графике кривая уходит вниз. Точное выражение для ΔH на графике совпадает с приближением при малых α и подтверждает знак. Ровно при $h = 2R$ слагаемые порядка α^2 сокращаются, а следующее, $-R\alpha^4/12$, отрицательно, поэтому граница сама неустойчива и условие записывается строгим неравенством. Физический смысл: центр масс высокого цилиндра слишком высоко над шаром, и малый крен уводит вертикаль силы тяжести за точку касания.

Задача 2. Канатоходцы.

Что происходит. Груз подвешен на проволоке, длина которой первоначально равна расстоянию между упорами. Чтобы провиснуть, проволока должна удлиниться, и в ней возникает сила упругости. Вертикальные составляющие двух таких сил удерживают груз. Задача складывает-

ся из трёх связей: геометрия связывает провисание x с деформацией ε; равновесие точки подвеса связывает x и силу F с весом груза; диаграмма растяжения связывает F с ε.

Обозначения. l — длина половины растянутой проволоки; α — угол, который проволока образует с горизонтом; F — сила упругости (по симметрии одинакова в обеих половинах); ε — относительная деформация проволоки, $F(\varepsilon)$ — диаграмма.



1. Геометрия. Половина проволоки — гипотенуза треугольника с катетами $L/2$ и x. Деформации малы (не больше 5 %), поэтому провисание тоже мало, $x \ll L$, и можно взять $(1+z)^{1/2} \approx 1 + z/2$ при $z = (2x/L)^2 \ll 1$:

$$l = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{4x^2}{L^2}\right)^{1/2} \approx \frac{L}{2} + \frac{x^2}{L}, \qquad \Delta l = l - \frac{L}{2} = \frac{x^2}{L}.$$

Удлинились обе половины, а исходная длина проволоки — L (натяжением в горизонтальном положении пренебрегаем):

$$\varepsilon = \frac{2\Delta l}{L} = \frac{2x^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad x = L\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

2. Равновесие груза. Груз неподвижен, поэтому сумма сил на систему «груз + точка подвеса» равна нулю. Горизонтальные составляющие двух сил F взаимно уничтожаются по симметрии, в проекции на вертикаль

$$2F\sin\alpha = mg.$$

Угол мал, $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{L/2} = \dfrac{2x}{L}$, откуда $F = \dfrac{mgL}{4x}$. Подставим x из пункта 1:

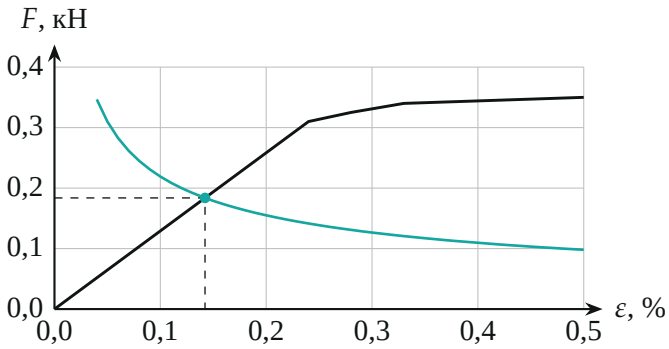
$$F = \frac{mg}{4\sqrt{\varepsilon/2}} = \frac{mg}{\sqrt{8\varepsilon}}. \qquad (1)$$

Обратите внимание: сила в проволоке много больше веса груза. При $\varepsilon \sim 10^{-3}$ получаем $F \approx 10\,mg$, потому что малый угол даёт малый множитель $\sin\alpha$. И ещё: ε нужно подставлять безразмерной, то есть $0{,}24\,\% = 2{,}4 \cdot 10^{-3}$, а не 0,24.

3. Где лежит решение для m_1. Равновесие находится как пересечение двух кривых: $F(\varepsilon)$ из диаграммы (растёт) и кривой нагрузки (1) для данной массы (убывает с ростом ε). Сначала узнаем, какой массе соответствует конец линейного участка — точка 1:

$$m_1^* = \frac{F_1\sqrt{8\varepsilon_1}}{g} = \frac{310 \cdot \sqrt{8 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-3}}}{9{,}8} \approx 4{,}4 \text{ кг}.$$

Масса 2,0 кг меньше этой, значит, кривая нагрузки в точке 1 лежит ниже диаграммы, и пересечение происходит раньше, на линейном участке.



Увеличенное начало диаграммы. Точка пересечения — равновесие груза 2,0 кг: $\varepsilon \approx 0{,}14\,\%$, $F \approx 0{,}18$ кН.

4. Линейный участок. На участке 0–1 сила пропорциональна дефор-

мации, $F = k\varepsilon$ с коэффициентом

$$k = \frac{F_1}{\varepsilon_1} = \frac{310\ \text{Н}}{2{,}4 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}29 \cdot 10^5\ \text{Н}.$$

Приравняем $k\varepsilon$ и (1): $\varepsilon^{3/2} = \dfrac{mg}{\sqrt{8}\,k}$. Так как $\varepsilon = 2x^2/L^2$, то $\varepsilon^{3/2} = \sqrt{8}\,x^3/L^3$, и

$$x = L\sqrt[3]{\frac{mg}{8k}} = 2{,}0 \cdot \sqrt[3]{\frac{2{,}0 \cdot 9{,}8}{8 \cdot 1{,}29 \cdot 10^5}}\ \text{м} \approx 5{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Проверим допущения. Провисание мало: $x/L \approx 0{,}027 \ll 1$. Деформация $\varepsilon = 2x^2/L^2 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ меньше ε_1, то есть мы действительно на линейном участке.

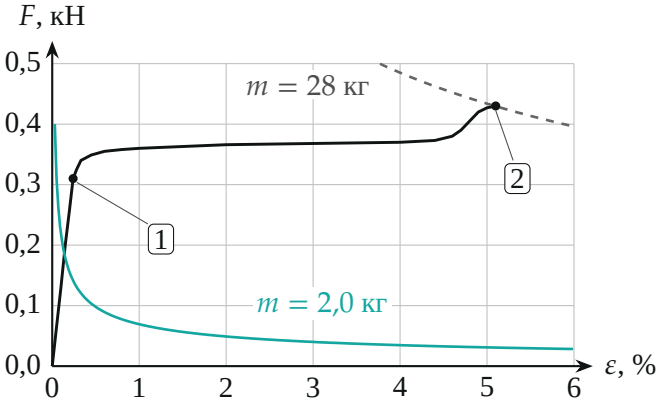
5. Предельная масса. Груз m уравновешен при деформации ε, если выполняется (1), то есть

$$m(\varepsilon) = \frac{F(\varepsilon)\sqrt{8\varepsilon}}{g}.$$

На диаграмме F не убывает, а $\sqrt{\varepsilon}$ растёт, поэтому $m(\varepsilon)$ возрастает: чем тяжелее груз, тем больше провисание, равновесие устойчиво. Наибольшая масса достигается в точке разрыва 2 — дальше проволока рвётся:

$$m_2 = \frac{F_2\sqrt{8\varepsilon_2}}{g} = \frac{430 \cdot \sqrt{8 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-2}}}{9{,}8} \approx 28\ \text{кг}.$$

На графике кривая нагрузки для $m = 28$ кг проходит ровно через точку 2.



Кривые нагрузки (1) для $m = 2{,}0$ кг и $m = 28$ кг на диаграмме растяжения.

Проверка. Второй способ для пункта 2.1 — энергия. На линейном участке работа упругой силы при удлинении проволоки на εL равна $kL\varepsilon^2/2 = 2kx^4/L^3$, потенциальная энергия груза $-mgx$. В равновесии энергия $E(x) = 2kx^4/L^3 - mgx$ минимальна: $dE/dx = 8kx^3/L^3 - mg = 0$, то есть тот же $x = L\sqrt[3]{mg/(8k)}$. Для пункта 2.2 малый угол при $\varepsilon_2 = 5{,}1\,\%$ уже не очень мал: $x/L \approx 0{,}16$, $\alpha \approx 0{,}32$ рад. Без приближений ($\varepsilon = \sqrt{1 + 4x^2/L^2} - 1$, $2F\sin\alpha = mg$ с точным $\sin\alpha = x/l$) получается $m_2 \approx 27$ кг; приближённая формула завышает ответ на 3 %, что допустимо при заданной точности данных.

Физический смысл: груз 28 кг держится на проволоке потому, что она ещё не дошла до разрыва; груз 2 кг провисает всего на 5 см, а проволока при этом нагружена в 9 раз сильнее его веса.

Ответ. Задача 1: $\dfrac{h}{R} < 2$. Задача 2: 2.1) $x \approx 5{,}3$ см; 2.2) $m_2 \approx 28$ кг.