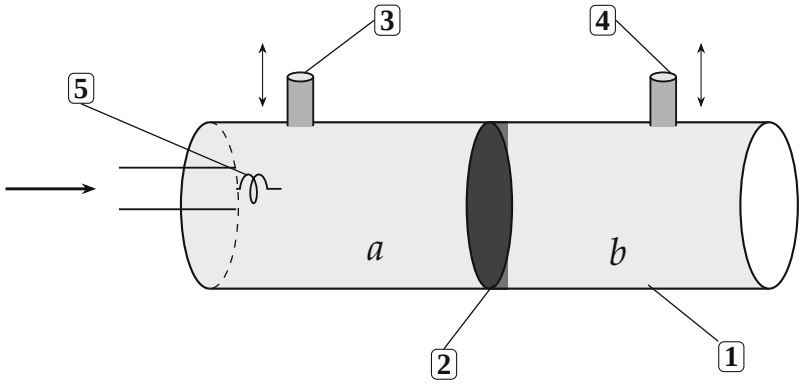
Газовые законы

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 10 класс, задача 2]

Для проведения экспериментов используется следующая установка. Закрытый теплоизолированный цилиндрический сосуд 1 разделен на две части a и b подвижным поршнем 2. Объем поршня значительно меньше объема сосуда. Через небольшие трубки с кранами 3 и 4 в обе части сосуда можно закачивать газ. В части сосуда a находится нагреватель 5, с помощью которого газу можно передавать теплоту. Теплоемкостью сосуда и поршня можно пренебречь. Трением поршня о стенку сосуда также можно пренебречь. Поршень является теплопроводящим, поэтому газы в разных частях сосуда могут медленно обмениваться теплотой. Во всех экспериментах используется аргон (одноатомный газ). Внутренний объем сосуда равен $2V_0$.



Часть 1. Горизонтальный сосуд.

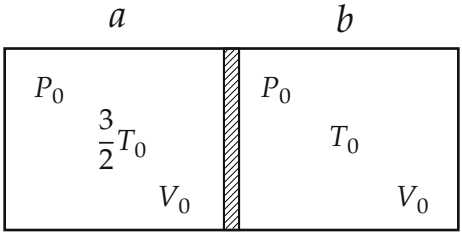
В листе ответов приведена Таблица 1, в которой показаны последовательные состояния газов и примерное положение поршня. В этой Таблице приведены известные значения параметров газов. Вам необходимо заполнить эту таблицу, привести значения параметров газов (давление, объем температура) в различных состояниях.

При проведении расчетов, используйте обозначения параметров газов в различных состояниях, приведенные в Таблице 1. При решении уравнений можете использовать численные данные, приведенные в

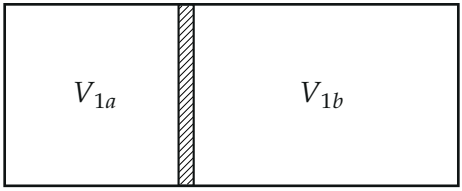
условии. Допускается проведение промежуточных численных расчетов. Все ответы должны быть выражены через значения параметров P_0, V_0, T_0.

Помните, что обыкновенные дроби — числа точные, а десятичные — приближенные!

Сосуд расположили горизонтально, поршень делит сосуд на две равных части. Обе части сосуда заполняют газом и закрывают краны. При этом давление газов в обеих частях сосуда одинаковы и равны P_0. Температура газа в части b равна T_0, а в части a — $\frac{3}{2}T_0$.

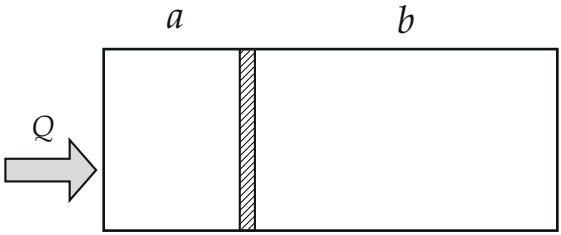


Поршень начинает медленно смещаться и через какой-то промежуток времени приходит в состояние равновесия.



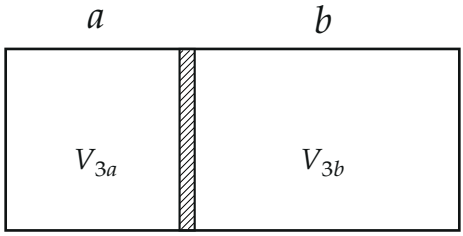
1.1 Рассчитайте значения параметров газов (давления, объемы, температуры) в обеих частях сосудов, после установления теплового равновесия.

После достижения равновесия, газу в части a с помощью нагревателя быстро сообщают количество теплоты равное $Q = \frac{1}{2}P_0V_0$.



1.2 Пренебрегая смещением поршня и теплопередачей через поршень за время нагрева, рассчитайте значение параметров газов после прекращения нагревания.

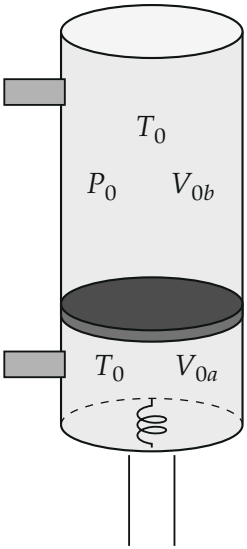
После прекращения нагревания поршень приходит в движение и переходит в состояние равновесия.



1.3 Рассчитайте значения параметров газов в обеих частях сосудов, после установления теплового равновесия.

Часть 2. Вертикальный сосуд.

Обе части сосуда заполнили одинаковыми количествами аргона, и расположили сосуд вертикально. Поршень находится в равновесии. При этом температуры газа в обеих частях сосуда равны, отношение объемов частей сосуда равно $\frac{V_{0b}}{V_{0a}} = \frac{3}{1}$, давление газа в верхней части сосуда — P_0. (которое отличается начального давления в Части 1).



2. Рассчитайте, какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы после достижения равновесия отношение объемов частей сосуда стало равным $\dfrac{V_{1b}}{V_{1a}} = \dfrac{2}{1}$.

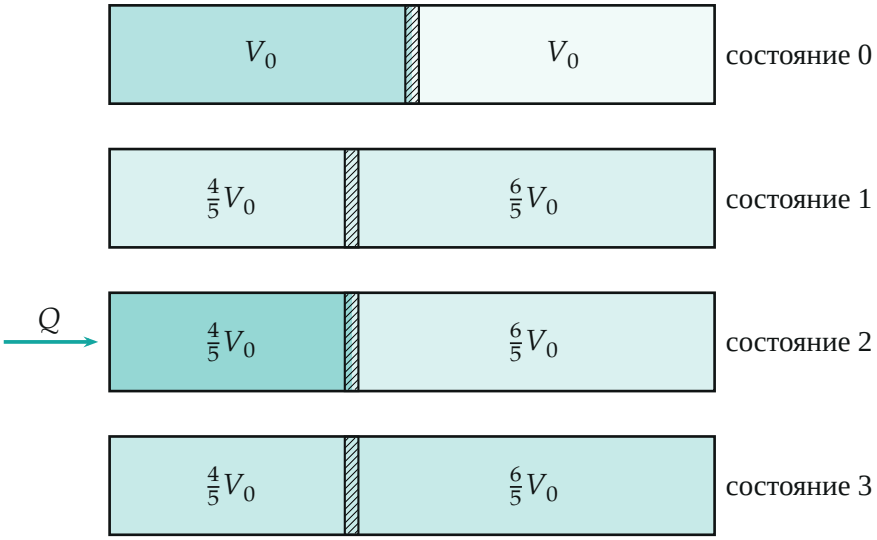
Примечание. Изменением потенциальной энергии взаимодействия газа с Землей можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Две порции одноатомного газа разделены подвижным поршнем в теплоизолированном сосуде. Поршень свободен, поэтому он двигается, пока давления по обе стороны не сравняются; поршень проводит тепло, поэтому температуры тоже выравниваются, но медленно. В части 1 внешнего воздействия нет, кроме короткого нагрева; в части 2 поршень тяжёлый, и часть тепла уходит на его подъём. Главная идея: не прослеживать процесс, а сравнивать только начальное и конечное состояния через сохранение числа молей газа каждой порции и энергию — первое начало термодинамики для всей системы.

Обозначения. Состояния: 0 — заполнение, 1 — после выравнивания, 2 — сразу после нагрева, 3 — конечное равновесие. Параметры порции в состоянии i — P_{ia}, V_{ia}, T_{ia} для a и P_{ib}, V_{ib}, T_{ib} для b. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \dfrac{3}{2}\nu RT = \dfrac{3}{2}PV$. Количества газа ν_a, ν_b в каждой

части не меняются, потому что краны закрыты.

Часть 1. Горизонтальный сосуд.



Положение поршня в состояниях 0–3. Чем темнее заливка, тем выше температура.

1.1. Состояние 1.

1. Условия равновесия. В конце процесса давления и температуры порций равны: $P_{1a} = P_{1b} = P_1$, $T_{1a} = T_{1b} = T_1$.

2. Объёмы. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для каждой порции между состояниями 0 и 1, оставив в левых частях постоянные νR:

$$\nu_a R = \frac{P_0 V_0}{\frac{3}{2}T_0} = \frac{P_1 V_{1a}}{T_1}, \qquad \nu_b R = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_{1b}}{T_1}.$$

Разделим уравнения друг на друга: $\dfrac{V_{1a}}{V_{1b}} = \dfrac{\nu_a}{\nu_b} = \dfrac{2}{3}$. Вместе с $V_{1a} + V_{1b} = 2V_0$ получаем

$$V_{1a} = \frac{4}{5}V_0, \qquad V_{1b} = \frac{6}{5}V_0.$$

3. Давление и температура. Эти два уравнения содержат только отношение P_1/T_1, поэтому по отдельности P_1 и T_1 из них не найти. Воспользуемся первым началом термодинамики для всего сосуда: он теплоизолирован, внешних работ нет, значит, полная внутренняя энергия постоянна. Работа газа a на поршне равна $P\,dV_a$, а газа b — $-P\,dV_a$, потому что поршень свободен и давление по обе стороны одинаково в каждый момент: сумма работ равна нулю. Тогда

$$\frac{3}{2}P_0V_0 + \frac{3}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}P_1 \cdot 2V_0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_0.$$

Обратите внимание: давление остаётся равным P_0 всё время, поэтому поршень сдвигается только за счёт расширения нагретого газа a и сжатия холодного b, а не из-за работы внешних сил. Температуру найдём из уравнения для порции b:

$$T_1 = T_0\,\frac{P_1V_{1b}}{P_0V_0} = \frac{6}{5}T_0.$$

Ответ 1.1: $P_{1a} = P_{1b} = P_0$; $V_{1a} = \frac{4}{5}V_0$, $V_{1b} = \frac{6}{5}V_0$; $T_{1a} = T_{1b} = \frac{6}{5}T_0$.

1.2. Состояние 2. Нагрев быстрый, поэтому поршень не успевает сместиться и через него не успевает уйти тепло: объёмы остаются $V_{2a} = \frac{4}{5}V_0$, $V_{2b} = \frac{6}{5}V_0$, а порция b не меняется: $P_{2b} = P_0$, $T_{2b} = \frac{6}{5}T_0$.

4. Порция *a*. Объём постоянен, работа равна нулю, и вся теплота идёт на внутреннюю энергию:

$$Q = \frac{3}{2}\,(P_{2a} - P_0)\,V_{1a},$$
$$\frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{3}{2}\,(P_{2a} - P_0)\cdot\frac{4}{5}V_0 \quad \Rightarrow \quad P_{2a} = \frac{17}{12}P_0.$$

Температуру найдём из уравнения Клапейрона между состояниями 1 и

2 для порции a при постоянном объёме: $T_{2a}/T_{1a} = P_{2a}/P_{1a}$, откуда

$$T_{2a} = \frac{6}{5}T_0 \cdot \frac{17}{12} = \frac{17}{10}T_0.$$

Ответ 1.2: $V_{2a} = \frac{4}{5}V_0$, $V_{2b} = \frac{6}{5}V_0$; $P_{2a} = \frac{17}{12}P_0$, $P_{2b} = P_0$; $T_{2a} = \frac{17}{10}T_0$, $T_{2b} = \frac{6}{5}T_0$.

1.3. Состояние 3. Конечное равновесие снова с равными давлениями и температурами, $P_{3a} = P_{3b} = P_3$, $T_{3a} = T_{3b} = T_3$.

5. Давление. Промежуточные состояния не нужны. Для всей системы между состояниями 0 и 3 теплота Q идёт только на увеличение внутренней энергии (работы газов на поршне взаимно уничтожаются):

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot 2V_0 + Q = \frac{3}{2}P_3 \cdot 2V_0,$$
$$3P_0V_0 + \frac{1}{2}P_0V_0 = 3P_3V_0 \quad \Rightarrow \quad P_3 = \frac{7}{6}P_0.$$

6. Температура. Сложим уравнения состояния обеих порций в состоянии 3, зная $\nu_a R = \frac{2P_0V_0}{3T_0}$ и $\nu_b R = \frac{P_0V_0}{T_0}$:

$$P_3 \cdot 2V_0 = (\nu_a + \nu_b)\,RT_3 = \frac{5}{3}\frac{P_0V_0}{T_0}\,T_3 \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{6}{5}T_0 \cdot \frac{P_3}{P_0} = \frac{7}{5}T_0.$$

7. Объёмы. Давление и температура порций одинаковы, значит, объёмы относятся как количества газа: $V_{3a}/V_{3b} = \nu_a/\nu_b = 2/3$, то есть

$$V_{3a} = \frac{4}{5}V_0, \qquad V_{3b} = \frac{6}{5}V_0.$$

Поршень вернулся в положение состояния 1: тепло через него перетекло, и давления выровнялись при тех же объёмах, что и до нагрева.

Ответ 1.3: $P_{3a} = P_{3b} = \frac{7}{6}P_0$; $V_{3a} = \frac{4}{5}V_0$, $V_{3b} = \frac{6}{5}V_0$; $T_{3a} = T_{3b} = \frac{7}{5}T_0$.

Заполненная Таблица 1:

состояние	P_a	V_a	T_a	P_b	V_b	T_b
0	P_0	V_0	$\frac{3}{2}T_0$	P_0	V_0	T_0
1	P_0	$\frac{4}{5}V_0$	$\frac{6}{5}T_0$	P_0	$\frac{6}{5}V_0$	$\frac{6}{5}T_0$
2	$\frac{17}{12}P_0$	$\frac{4}{5}V_0$	$\frac{17}{10}T_0$	P_0	$\frac{6}{5}V_0$	$\frac{6}{5}T_0$
3	$\frac{7}{6}P_0$	$\frac{4}{5}V_0$	$\frac{7}{5}T_0$	$\frac{7}{6}P_0$	$\frac{6}{5}V_0$	$\frac{7}{5}T_0$

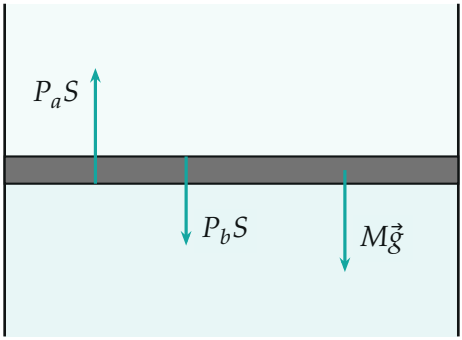
Проверка части 1. Сумма $(\nu_a + \nu_b)\,R$ одинакова во всех состояниях. В состоянии 3, например,

$$\frac{P_3 \cdot 2V_0}{T_3} = \frac{\frac{7}{6}\cdot 2}{\frac{7}{5}}\,\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{5}{3}\,\frac{P_0V_0}{T_0}.$$

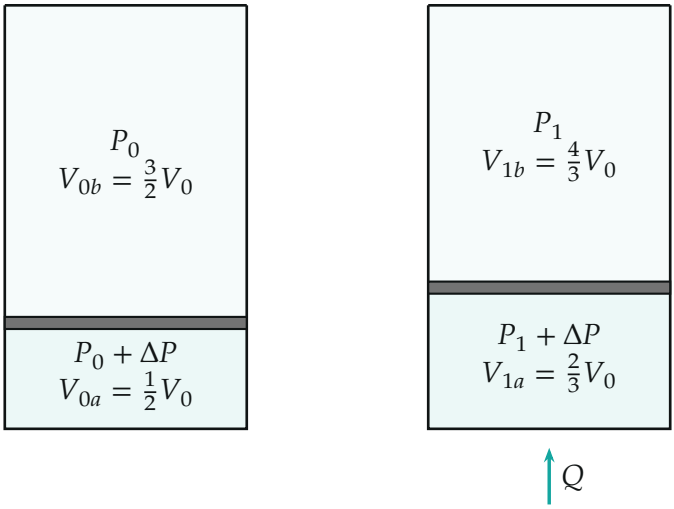
Энергия в состоянии 2 равна $\frac{3}{2}\left(\frac{17}{12}\cdot\frac{4}{5}+\frac{6}{5}\right)P_0V_0 = \frac{7}{2}P_0V_0$, а это $3P_0V_0 + Q$, как и должно быть.

Часть 2. Вертикальный сосуд.

Что происходит. Теперь поршень имеет вес. Нижний газ a давит на него снизу, верхний b — сверху, и разность давлений постоянна: $P_a - P_b = \Delta P = Mg/S$. Нагреваем нижний газ: он расширяется, поднимает поршень и через него греет верхний. Теплота идёт на нагрев обоих газов и на подъём поршня.



Силы на поршень в равновесии: $P_aS = P_bS + Mg$.



Начальное и конечное состояния вертикального сосуда.

8. Объёмы. Суммарный объём $2V_0$, поэтому из отношений

$$V_{0a} = \frac{1}{2}V_0,\ V_{0b} = \frac{3}{2}V_0; \qquad V_{1a} = \frac{2}{3}V_0,\ V_{1b} = \frac{4}{3}V_0.$$

9. Давления. Количества газа в частях одинаковы и температуры равны (поршень проводит тепло), значит, $P_aV_a = P_bV_b$ в каждом равновесном состоянии. Начальное: $(P_0 + \Delta P) \cdot \frac{1}{2}V_0 = P_0 \cdot \frac{3}{2}V_0$, откуда

$$\Delta P = 2P_0.$$

Конечное: $(P_1 + \Delta P) \cdot \frac{2}{3}V_0 = P_1 \cdot \frac{4}{3}V_0$, откуда

$$P_1 = \Delta P = 2P_0.$$

Обратите внимание: $\Delta P = Mg/S$ определяется только весом поршня и не зависит от состояния газа, поэтому в обоих состояниях разность давлений одинакова.

10. Изменение внутренней энергии. Обе порции газа одноатомные,

внутренняя энергия $\frac{3}{2}PV$ складывается:

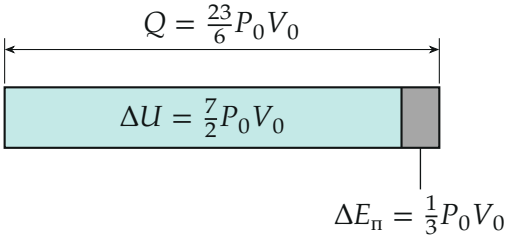
$$U_0 = \frac{3}{2}\left[P_0 \cdot \frac{3}{2}V_0 + 3P_0 \cdot \frac{1}{2}V_0\right] = \frac{9}{2}P_0V_0,$$
$$U_1 = \frac{3}{2}\left[2P_0 \cdot \frac{4}{3}V_0 + 4P_0 \cdot \frac{2}{3}V_0\right] = 8P_0V_0,$$
$$\Delta U = U_1 - U_0 = \frac{7}{2}P_0V_0.$$

11. Работа против силы тяжести поршня. Поршень поднимается, объём нижней части растёт на $V_{1a} - V_{0a} = \frac{1}{6}V_0$. Работа газов идёт на рост потенциальной энергии поршня, кинетическая в начале и в конце равна нулю:

$$\Delta E_\text{п} = Mg\,\Delta h = \Delta P \cdot \Delta V_a = 2P_0 \cdot \frac{1}{6}V_0 = \frac{1}{3}P_0V_0.$$

12. Первое начало термодинамики для газа и поршня. Теплота идёт на увеличение внутренней энергии обоих газов и потенциальной энергии поршня:

$$Q = \Delta U + \Delta E_\text{п} = \frac{7}{2}P_0V_0 + \frac{1}{3}P_0V_0 = \frac{23}{6}P_0V_0.$$



Распределение теплоты Q в части 2.

Проверка части 2. Второй способ: через температуру. Из $\nu RT_0 = P_0 \cdot \frac{3}{2}V_0 = \frac{3}{2}P_0V_0$ и $\nu RT_1 = P_1V_{1b} = \frac{8}{3}P_0V_0$ получаем $T_1/T_0 = \frac{16}{9}$; тогда $\Delta U = 2 \cdot \frac{3}{2}\nu R\,(T_1 - T_0) = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{9}P_0V_0 = \frac{7}{2}P_0V_0$ — то же значение, найденное другим путём. Размерность: $P \cdot V$ — джоули. Тяжёлый

поршень требует больше теплоты, чем ΔU, на $\frac{1}{3}P_0V_0$, а при невесомом поршне ($\Delta P \to 0$) эта добавка исчезла бы.

Физический смысл: большая часть теплоты уходит на нагрев газа от T_0 до $\frac{16}{9}T_0$, и лишь около 9 % — на подъём поршня.

Ответ. 1.1) $P_{1a} = P_{1b} = P_0$; $V_{1a} = \frac{4}{5}V_0$, $V_{1b} = \frac{6}{5}V_0$; $T_{1a} = T_{1b} = \frac{6}{5}T_0$.

1.2) $V_{2a} = \frac{4}{5}V_0$, $V_{2b} = \frac{6}{5}V_0$; $P_{2a} = \frac{17}{12}P_0$, $P_{2b} = P_0$; $T_{2a} = \frac{17}{10}T_0$, $T_{2b} = \frac{6}{5}T_0$.

1.3) $P_{3a} = P_{3b} = \frac{7}{6}P_0$; $V_{3a} = \frac{4}{5}V_0$, $V_{3b} = \frac{6}{5}V_0$; $T_{3a} = T_{3b} = \frac{7}{5}T_0$.

2) $Q = \frac{23}{6}P_0V_0$.