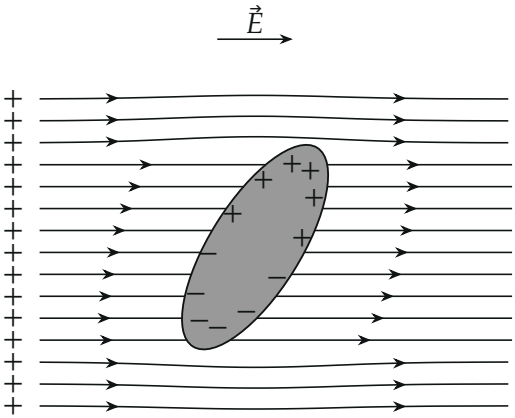
Поле в диэлектрике

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 10 класс, задача 3]



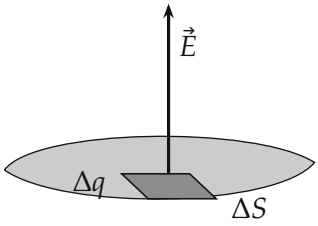
Диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле, поляризуется, т.е. происходит частичное смещение электрических зарядов (электронов и ядер). Вследствие чего на поверхности однородного диэлектрика возникают индуцированные (поляризационные) заряды, которые создают собственное электрическое поле, как внутри диэлектрика, так и вне его. Если силовые линии электрического поля везде на границе диэлектрика перпендикулярны этой границе, то напряженность электрического поля внутри диэлектрика оказывается в ε раз меньше, чем напряженность поля при отсутствии диэлектрика (где ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрика).

В данном задании Вам необходимо продемонстрировать понимание описанного механизма изменения поля в диэлектрике.

Если электрические заряды распределены по поверхности, то удобно ввести такую характеристику зарядов, как их поверхностная плотность:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}. \qquad (1)$$

где Δq — заряд, находящийся на малой площадке площади ΔS.



Во всех частях этого задания предполагается, что электрические заряды распределены по плоским поверхностям равномерно $\sigma = \text{const}$, а создаваемые ими электрическое поле является однородным. Т.е. краевыми эффектами следует пренебрегать. Считайте, что вне диэлектриков находится вакуум.

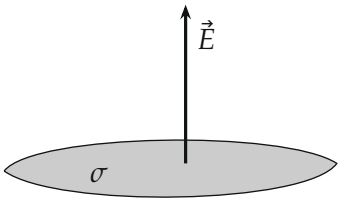
Часть 1. Нормальное поле.

В учебнике физики для 10 класса приведена формула для емкости плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (2)$$

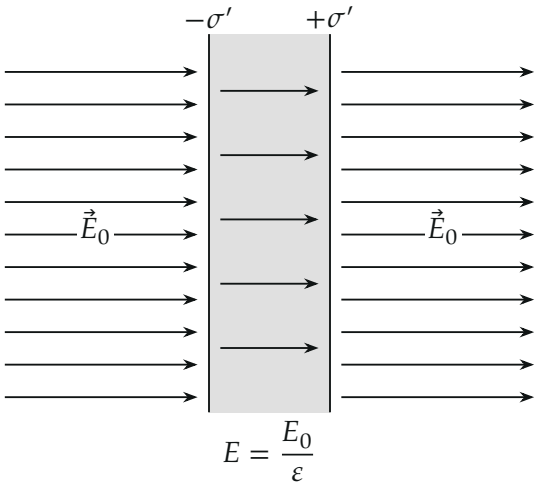
где S — площадь пластин (обкладок) конденсатора, d — расстояние между обкладками, ε — диэлектрическая проницаемость вещества, находящегося между обкладками, ε_0 — электрическая постоянная.

1.1 Бесконечная равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ плоскость создает однородное электрическое поле, напряженности $\vec{E}$.



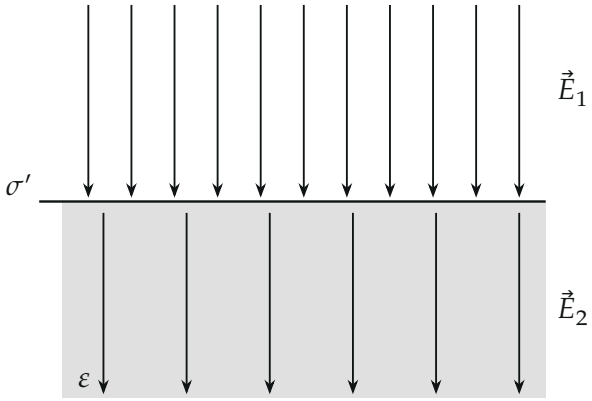
1.1 Используя формулу для емкости плоского конденсатора (2), выразите модуль напряженности электрического поля E, создаваемого зарядами на плоскости, через их поверхностную плотность σ.

1.2 В однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}_0$ помещена незаряженная плоскопараллельная пластина, изготовленная из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Силовые линии поля перпендикулярны пластине.



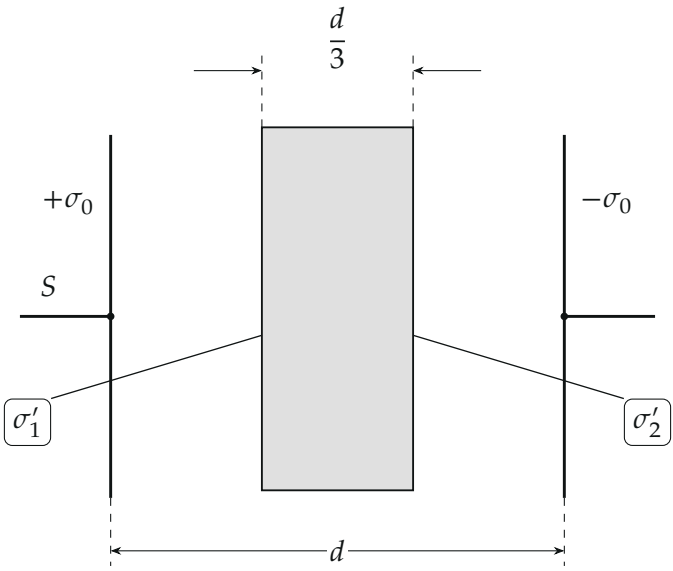
1.2 Найдите поверхностную плотность индуцированных зарядов на пластине σ'. Выразите значение этой плотности а) через напряженность поля E_0 вне пластины; б) через напряженность поля E внутри пластины.

1.3 Силовые линии электрического поля перпендикулярны плоской границе однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε (нижняя граница находится бесконечно далеко). Над диэлектриком напряженность поля равна $\vec{E}_1$.



1.3 Найдите поверхностную плотность индуцированных на границе зарядов σ'. Выразите ее через напряженность поля внутри диэлектрика E_2.

1.4 Плоский конденсатор состоит из двух проводящих параллельных пластин площади S, находящихся на расстоянии d друг от друга, которое значительно меньше размеров пластин. Между пластинами находится непроводящая плоскопараллельная пластинка толщины $\frac{d}{3}$, расположенная параллельно пластинам-обкладкам конденсатора. На обкладках конденсатора равномерно распределены электрические заряды, поверхностные плотности которых равны $\pm\sigma_0$.



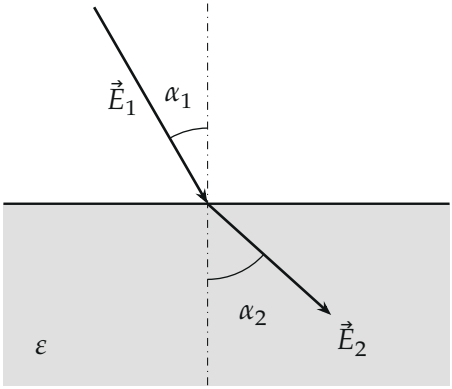
1.4.1 Найдите поверхностные плотности зарядов σ_1', σ_2' на поверхностях диэлектрической пластинки (укажите знаки этих зарядов).

1.4.2 Найдите электрическую емкость этого конденсатора C_0.

1.4.3 Найдите давление, которое оказывает электрическое поле на одну из граней диэлектрической пластинки. Укажите, растягивается или сжимается пластинка под действием электрического поля.

Часть 2. Наклонное поле.

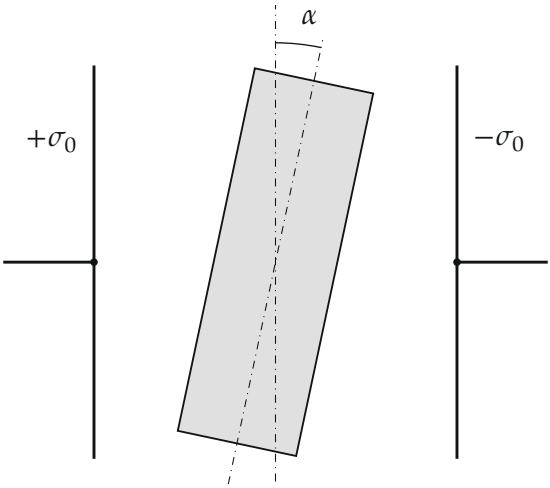
2.1 Силовые линии однородного электрического поля напряженности $\vec{E}_1$ образуют угол α_1 с нормалью к плоской границе диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε. Внутри диэлектрика вектор напряженности однородного электрического поля $\vec{E}_2$ направлен под углом α_2 к нормали к границе диэлектрика.



2.1.1 Получите «закон преломления» силовых линий, т.е. соотношение, связывающее углы α_1, α_2 и диэлектрическую проницаемость ε.

2.1.2 Найдите отношение модулей напряженностей полей $\dfrac{E_2}{E_1}$ как функцию диэлектрической проницаемости ε и угла α_1.

2.2 Диэлектрическую пластину конденсатора, описанного в п. 1.4, повернули на угол α.



2.2.1 Найдите емкость конденсатора C с повернутой пластиной.

2.2.2 Найдите относительное изменение емкости конденсатора $\dfrac{C - C_0}{C_0}$ при повороте пластины на малый угол α. (C_0 — емкость

конденсатора, найденная в п. 1.4.2.)

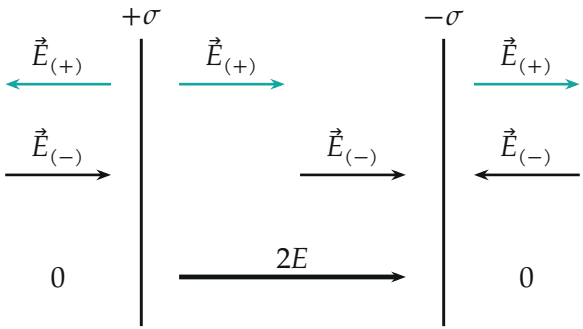
Примечание. Считайте, что при повороте пластины распределение зарядов на обкладках конденсатора и на гранях диэлектрической пластины остается равномерным, а электрическое поле в зазорах между обкладками пластинкой остается однородными перпендикулярным обкладкам конденсатора.

▲ **Решение. Что происходит.** Диэлектрик в поле поляризуется: на его границах появляются связанные заряды, и их поле накладывается на внешнее. Вся задача держится на суперпозиции полей равномерно заряженных плоскостей, на потенциальности электрического поля (работа по любому пути между двумя точками одна и та же) и на условии из начала: при линиях поля, перпендикулярных границе, поле в диэлектрике в ε раз меньше. Касательную составляющую поля в части 2 мы получим из того, что связанные заряды создают поле только вдоль нормали.

Обозначения. E_0 — поле внешних зарядов (без зарядов самого диэлектрика); E' — поле связанных зарядов; σ' — их поверхностная плотность (по модулю).

Часть 1. Нормальное поле.

1.1. Поле плоскости. Плоский конденсатор — две плоскости с плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. Каждая создаёт поле E (то, что нужно найти), перпендикулярное плоскостям и направленное от положительной плоскости и к отрицательной. Между пластинами поля складываются и дают $2E$, а снаружи направлены противоположно и взаимно уничтожаются.



Разность потенциалов между обкладками равна работе поля над еди-

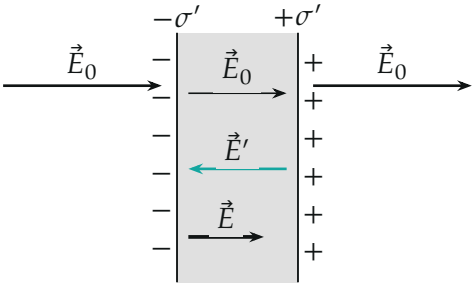
ничным зарядом: $\Delta\varphi = 2Ed$. Заряд обкладки $Q = \sigma S$, поэтому

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma S}{2Ed}.$$

Сравним с формулой (2) при $\varepsilon = 1$: $\dfrac{\varepsilon_0 S}{d} = \dfrac{\sigma S}{2Ed}$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

1.2. Пластина в поле. Внутри пластины складываются внешнее поле E_0 и поле двух плоскостей связанных зарядов, $\pm\sigma'$. Эти плоскости — та же картина, что в п. 1.1: внутри пластины их поля складываются, $E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$, и направлены против E_0; снаружи они взаимно уничтожаются, поэтому поле вне пластины остаётся равным E_0.



Поле внутри пластины

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}, \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{(по условию)}.$$

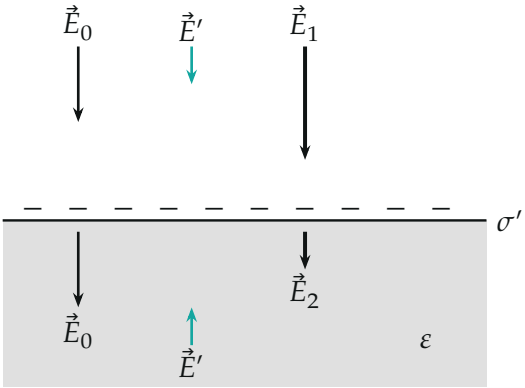
Приравняем: $E_0 - \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \dfrac{E_0}{\varepsilon}$, откуда

$$\sigma' = \varepsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\varepsilon_0 E_0 \quad \text{(а)}, \qquad \sigma' = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 E \quad \text{(б)},$$

где в (б) подставлено $E_0 = \varepsilon E$.

Знак: на грани, куда линии поля входят, связанный заряд отрицателен, на грани, откуда выходят, — положителен (рисунок).

1.3. Граница диэлектрика. Теперь связанные заряды — одна плоскость на границе. Её поле $E' = \dfrac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$ над границей и под ней направлено к плоскости (заряд отрицателен): над границей оно добавляется к полю E_0 остальных зарядов, под границей вычитается.



$$E_1 = E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \qquad E_2 = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_1 - E_2 = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}.$$

По условию $E_1 = \varepsilon E_2$, поэтому $(\varepsilon - 1)E_2 = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$ и

$$\sigma' = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 E_2.$$

Скачок поля при переходе через заряженную поверхность равен σ'/ε_0 — это и есть связь между E_1 и E_2.

1.4. Пластинка в конденсаторе. Заряды обкладок $\pm\sigma_0$ создают в зазорах поле $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ (двойное поле одной плоскости). Пластинка стоит

перпендикулярно линиям поля, это ситуация п. 1.2, поэтому внутри неё

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

1.4.1. По п. 1.2(б)

$$\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\sigma_0.$$

Грань, обращённая к положительной обкладке, заряжена отрицательно, обращённая к отрицательной — положительно:

$$\sigma_1' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\sigma_0, \qquad \sigma_2' = +\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\sigma_0.$$

1.4.2. Ёмкость. По определению $C_0 = Q/\Delta\varphi$, $Q = \sigma_0 S$. Разность потенциалов — работа поля над единичным зарядом по пути через два зазора общей толщиной $\frac{2d}{3}$ с полем E_0 и через пластинку толщиной $\frac{d}{3}$ с полем E:

$$\Delta\varphi = E_0 \cdot \frac{2d}{3} + \frac{E_0}{\varepsilon} \cdot \frac{d}{3} = \frac{E_0 d}{3\varepsilon}\,(2\varepsilon + 1) = \frac{\sigma_0 d\,(2\varepsilon + 1)}{3\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$C_0 = \frac{\sigma_0 S}{\Delta\varphi} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Это ёмкость трёх последовательно соединённых конденсаторов: двух воздушных толщиной $\frac{d}{3}$ каждый и одного с диэлектриком.

1.4.3. Давление на грань. Рассмотрим малый участок ΔS левой грани с зарядом $\sigma_1' \Delta S$. Сила — это заряд, умноженный на поле всех *остальных* зарядов: обкладок и противоположной грани. Собственное поле участка на себя не действует. Поле обкладок направлено от положительной обкладки к отрицательной и равно $\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$, поле второй грани у первой на-

правлено против него и равно $\dfrac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$ (по п. 1.1). Поэтому

$$P = \frac{F}{\Delta S} = |\sigma'|\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2-1}{2\varepsilon^2}\cdot\frac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0}.$$

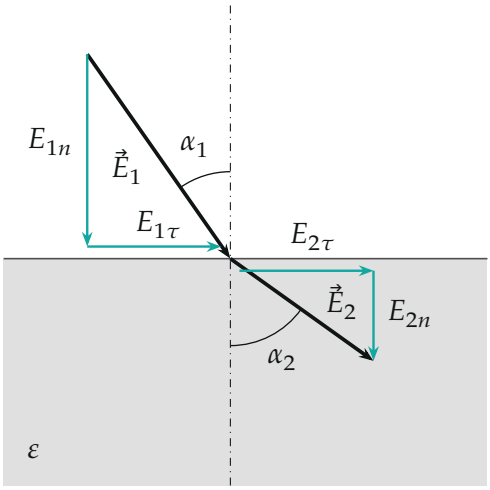
Левая грань заряжена отрицательно, поле направлено вправо, значит, сила направлена влево, то есть наружу, к положительной обкладке. Правая грань — симметрично. Обе силы направлены от центра пластинки, поэтому пластинка **растягивается**.

Обратите внимание: взять полное поле на грани, σ_0/ε_0 с одной стороны и $\sigma_0/(\varepsilon\varepsilon_0)$ с другой, нельзя — оно на заряженной поверхности скачет. Правильное значение — среднее из двух сторон: $\dfrac{1}{2}\left(E_0 + \dfrac{E_0}{\varepsilon}\right)$, и оно даёт тот же результат.

Часть 2. Наклонное поле.

2.1. Закон преломления. Поле связанных зарядов перпендикулярно границе. Поэтому оно меняет только нормальную составляющую, а касательная при переходе через границу не изменяется. Нормальная составляющая уменьшается в ε раз — так сказано в условии для поля, перпендикулярного границе, а нормальную и касательную составляющие можно рассматривать независимо (суперпозиция). Углы отсчитываются от нормали:

$$E_{1\tau} = E_1\sin\alpha_1, \quad E_{1n} = E_1\cos\alpha_1, \qquad E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad E_{2n} = \frac{E_{1n}}{\varepsilon}.$$



2.1.1.

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}/\varepsilon} = \varepsilon \operatorname{tg}\alpha_1, \qquad \text{то есть} \qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \varepsilon.$$

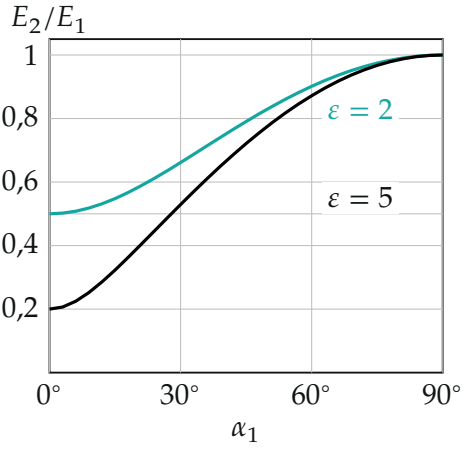
Линии поля в диэлектрике отклоняются от нормали сильнее ($\alpha_2 > \alpha_1$), а не слабее, как у света при переходе в оптически плотную среду.

2.1.2. Модуль поля внутри:

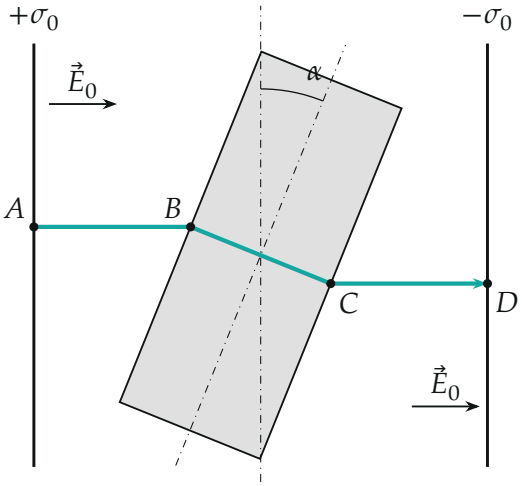
$$E_2 = \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = E_1\sqrt{\sin^2\alpha_1 + \frac{\cos^2\alpha_1}{\varepsilon^2}} = \frac{E_1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1},$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sqrt{1 + (\varepsilon^2 - 1)\sin^2\alpha_1}}{\varepsilon}.$$

Обратите внимание: угол отсчитывается *от нормали*, поэтому у тангенциальной составляющей стоит $\sin\alpha_1$, а не $\cos\alpha_1$. Проверка: при $\alpha_1 = 0$ (поле перпендикулярно границе) получаем $1/\varepsilon$, как в части 1; при $\alpha_1 = 90^\circ$ (поле вдоль границы) — единицу: касательная составляющая не меняется. Утверждение «диэлектрик ослабляет поле в ε раз» верно только для нормального поля.



2.2. Повёрнутая пластинка. Заряды на обкладках не меняются, поэтому по условию поле в зазорах остаётся $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ и перпендикулярно обкладкам. Внутри пластинки нормальная составляющая E_n определяется нормальной составляющей поля в зазоре: $E_{0n} = E_0 \cos\alpha$ и $E_n = E_{0n}/\varepsilon$.



2.2.1. Ёмкость. Разность потенциалов не зависит от пути, возьмём путь $ABCD$: AB и CD — горизонтальные отрезки в зазорах, BC — отрезок вдоль нормали к граням пластинки через её середину, длиной $\frac{d}{3}$.

Вдоль BC вклад даёт только нормальная составляющая E_n. Горизонтальная проекция отрезка BC равна $\frac{d}{3}\cos\alpha$, а весь путь по горизонтали должен равняться d, значит, по симметрии

$$|AB| = |CD| = \frac{d}{2} - \frac{d}{6}\cos\alpha.$$

Тогда

$$\Delta\varphi = E_0\,(|AB| + |CD|) + E_n\frac{d}{3} = E_0\left(d - \frac{d}{3}\cos\alpha\right) + \frac{E_0\cos\alpha}{\varepsilon}\cdot\frac{d}{3}$$
$$= E_0 d\left(1 - \frac{\varepsilon-1}{3\varepsilon}\cos\alpha\right).$$

Заряд обкладки $Q = \sigma_0 S = \varepsilon_0 E_0 S$, поэтому

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{3\varepsilon}{3\varepsilon - (\varepsilon-1)\cos\alpha}\cdot\frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Проверка: при $\alpha = 0$ получаем $\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = C_0$; при $\alpha = 90^\circ$ (пластинка вдоль линий поля) — $\frac{\varepsilon_0 S}{d}$, ёмкость пустого конденсатора, и это верно: поле вдоль пластинки её не замечает.

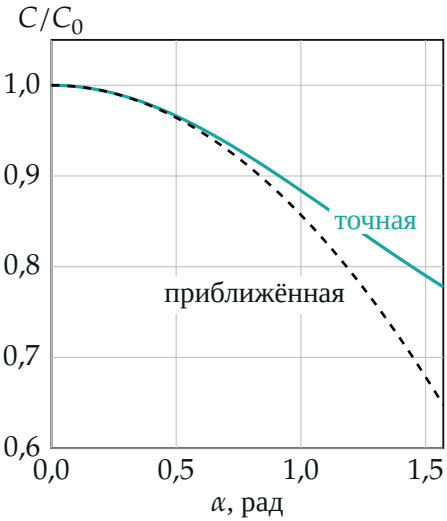
2.2.2. Малый угол. Воспользуемся $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ и $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$:

$$C = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1 + (\varepsilon-1)\frac{\alpha^2}{2}}\frac{\varepsilon_0 S}{d} = C_0\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1}\frac{\alpha^2}{2}}$$
$$\approx C_0\left(1 - \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1}\cdot\frac{\alpha^2}{2}\right),$$

$$\frac{C - C_0}{C_0} = -\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon+1}\cdot\frac{\alpha^2}{2}.$$

Обратите внимание: линейного по α слагаемого нет, потому что $\cos\alpha$ в

малом угле меняется только во втором порядке. Ёмкость уменьшается при повороте в любую сторону: вертикальное положение — максимум.



Ёмкость повёрнутой пластинки при $\varepsilon = 3$: точная зависимость $7/(9 - 2\cos\alpha)$ и приближение $1 - \alpha^2/7$.

Проверка. Размерности: σ'/ε_0 и σ_0/ε_0 — напряжённость, σ_0^2/ε_0 — давление (энергия на объём). Предел $\varepsilon \to 1$: все $\sigma' \to 0$, $P \to 0$, $C \to \varepsilon_0 S/d$, $E_2/E_1 \to 1$ — диэлектрика нет, ничего не меняется. Предел $\varepsilon \to \infty$ (проводник): $\sigma' \to \sigma_0$, индуцированный заряд полностью экранирует обкладки, поле внутри равно нулю, $C_0 \to (3/2)\,\varepsilon_0 S/d$ — зазор $d/3$ закорочен, остаётся конденсатор с расстоянием $2d/3$; давление $\sigma_0^2/(2\varepsilon_0)$ — известное давление поля на проводник.

Физический смысл: диэлектрик ослабляет только поле, нормальное к его границе, а касательное не трогает. Поэтому линии поля в нём изламываются, а поворот пластинки чуть уменьшает ёмкость.

Ответ. 1.1) $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

1.2) а) $\sigma' = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\varepsilon_0 E_0$; б) $\sigma' = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 E$.

1.3) $\sigma' = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 E_2$.

1.4.1) $\sigma_1' = -\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0$, $\sigma_2' = +\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\sigma_0$.

1.4.2) $C_0 = \dfrac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \cdot \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$.

1.4.3) $P = \dfrac{\varepsilon^2 - 1}{2\varepsilon^2} \cdot \dfrac{\sigma_0^2}{\varepsilon_0}$; пластинка растягивается.

2.1.1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \varepsilon$.

2.1.2) $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{\sqrt{1 + (\varepsilon^2 - 1)\sin^2\alpha_1}}{\varepsilon}$ (углы от нормали).

2.2.1) $C = \dfrac{3\varepsilon}{3\varepsilon - (\varepsilon - 1)\cos\alpha} \cdot \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$.

2.2.2) $\dfrac{C - C_0}{C_0} = -\dfrac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon + 1} \cdot \dfrac{\alpha^2}{2}$.