Гигантомания

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 11 класс, задача 1] **Гигантомания.**

Задание состоит из трёх не связанных между собой задач на одну тему. Во всех задачах следует пренебрегать взаимодействием тел с Солнцем и другими небесными телами, движением Земли вокруг Солнца и её вращением вокруг собственной оси, сопротивлением воздуха. Могут понадобиться: радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, масса Земли $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2.

Лист приближённых формул олимпиады: $(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x$ (при любом γ); $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ (x в радианах); $e^x \approx 1 + x$. Во всех формулах $|x| \ll 1$. Если отбрасываете малые величины порядка x^2 и выше — отбрасывайте их сразу в промежуточных выкладках; если сохраняете величины определённого порядка — сохраняйте во всех преобразованиях.

Задача 1.1. Падение камушка. Сферическое тело радиуса $r = 200$ м находится на расстоянии $h = 100$ м от поверхности Земли (см. рис.) и начинает падать на Землю без начальной скорости.

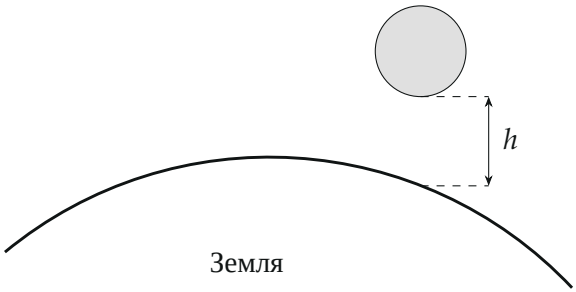


Рисунок условия: тело на высоте h над поверхностью Земли.

1.1.1 За какое время τ тело упадёт на Землю? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

1.1.2 С какой скоростью v относительно Земли тело упадёт на поверхность Земли? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

Решите задачу в двух случаях: а) плотность падающего тела равна средней плотности Земли; б) масса тела равна массе Земли (тело — небольшая нейтронная звёздочка).

Задача 1.2. Космический корабль. Космический корабль движется по круговой орбите вокруг Земли на высоте h над поверхностью Земли, которая значительно меньше радиуса Земли. Размеры корабля значительно меньше радиуса Земли.

1.2 Чему равен период обращения корабля вокруг Земли T? Получите формулу и рассчитайте численное значение. Решите задачу в двух случаях: а) масса корабля значительно меньше массы Земли; б) масса корабля равна массе Земли.

Задача 1.3. Эталон часа. На поверхности Земли построили башню, высота которой немного превышает радиус Земли R. К вершине башни прикрепили математический маятник длины R. Массой подвеса можно пренебречь, подвешенный груз можно считать материальной точкой, масса которой значительно меньше массы Земли.

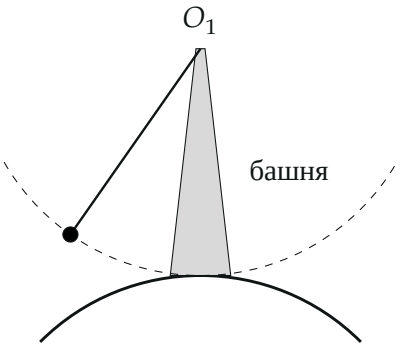


Рисунок условия: маятник длины R на вершине башни, пунктир — траектория груза.

1.3 Чему равен период малых колебаний T этого маятника? Получите формулу и рассчитайте численное значение.

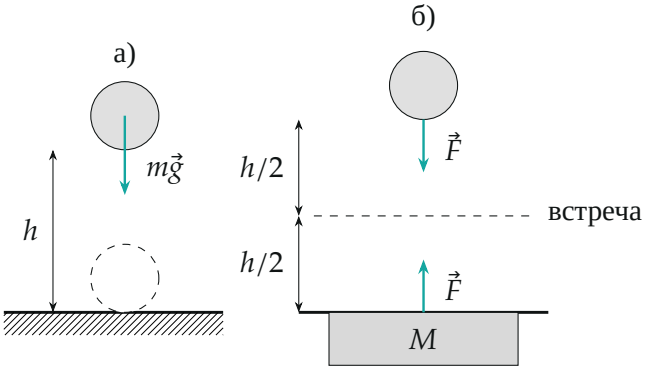
▲ **Решение. Что происходит.** Тела здесь огромные, поэтому прежде всего надо понять, на каком расстоянии друг от друга находятся их центры. Высота h, радиус тела r и высота орбиты малы по сравнению с R, значит, расстояние между центрами с точностью до двух значащих цифр равно R, а сила притяжения $F = G\dfrac{Mm}{R^2} = mg$ остаётся такой же, как

у поверхности Земли. Главная идея — помнить, что притягиваются обе стороны: если тело сравнимо с Землёй по массе, то движется и Земля.

Обозначения. m — масса падающего тела (корабля, груза маятника); M — масса Земли; $g = GM/R^2$.

Задача 1.1.

1. Случай а) (плотность тела равна средней плотности Земли). Радиус тела $r = 200$ м, а радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, поэтому масса тела меньше массы Земли в $(R/r)^3 \sim 10^{14}$ раз. Землю можно считать неподвижной, а тело — падающим на неё с постоянной силой mg.



Падение тела: а) Земля неподвижна, тело проходит путь h; б) тело и Земля сближаются навстречу, каждый проходит $h/2$. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекции на вертикальную ось, направленную вниз: $ma = mg$, откуда $a = g$. Равноускоренное движение без начальной скорости на пути h даёт

$$h = \frac{g\tau_a^2}{2}, \qquad \tau_a = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{10}} \approx 4{,}5 \text{ с}.$$

Скорость падения найдём по закону сохранения механической энергии тела между началом падения и касанием поверхности (сила тяжести постоянна, потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую):

$$\frac{mv_a^2}{2} = mgh, \qquad v_a = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 100} \approx 45 \text{ м/с}.$$

2. Случай б) (масса тела равна массе Земли). Теперь сила притяжения между телами $F = GM^2/R^2 = Mg$, и по третьему закону Ньютона такая же по модулю сила действует на Землю. Массы равны, значит, ускорения обоих тел равны по модулю: $a = F/M = g$. Они направлены навстречу друг другу. Оба тела начинают из покоя, поэтому всё движение симметрично: каждое проходит путь $h/2$ и встречаются они посередине первоначального промежутка. Для одного тела

$$\frac{h}{2} = \frac{g\tau_b^2}{2}, \qquad \tau_b = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{100}{10}} \approx 3{,}2 \text{ с}.$$

Скорость каждого тела в момент встречи $V_1 = g\tau_b = \sqrt{gh}$. Скорость тела относительно Земли — сумма модулей скоростей, потому что они направлены навстречу друг другу:

$$v_b = 2V_1 = 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{10 \cdot 100} \approx 63 \text{ м/с}.$$

Обратите внимание: ответ для случая б) нельзя получить прежней формулой $\sqrt{2gh}$ — там Земля неподвижна, а здесь она тоже разгоняется.

Проверка по относительному движению: расстояние между телами h сокращается с относительным ускорением $g + g = 2g$ (ускорения направлены навстречу), поэтому $h = \dfrac{2g\tau_b^2}{2}$, $\tau_b = \sqrt{h/g}$, а относительная скорость $v_b = 2g\tau_b = 2\sqrt{gh}$ — то же самое.

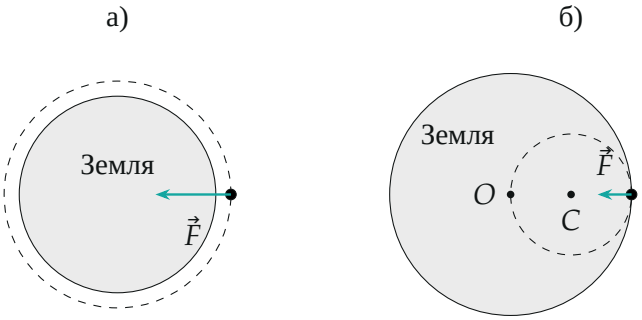
Задача 1.2.

3. Случай а) (корабль много легче Земли). Землю считаем неподвижной, центр орбиты — центр Земли. Радиус орбиты $R + h \approx R$: поправка $h/R \approx 0{,}03$ не влияет на двузначный результат. Единственная сила на корабль — сила притяжения Земли $F = mg$, направленная к центру Земли. Второй закон Ньютона для корабля в проекции на направление к центру:

$$m\frac{v^2}{R} = mg, \qquad v = \sqrt{gR},$$

$$T_a = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}4\cdot 10^6}{10}} \approx 5{,}0\cdot 10^3 \text{ с} \approx 84 \text{ мин}.$$

4. Случай б) (масса корабля равна массе Земли). Внешних сил на систему «Земля + корабль» нет, поэтому её центр масс C неподвижен. При равных массах он лежит посередине между центрами Земли и корабля, то есть на расстоянии $R/2$ от каждого. Корабль и центр Земли обращаются вокруг C по одной и той же окружности радиуса $R/2$ с одинаковым периодом, находясь всё время на противоположных концах диаметра. Заметим, что точка C лежит внутри Земли: Земля вся «качается» вокруг неё.



Корабль (чёрная точка) и Земля: а) Земля неподвижна, орбита корабля — окружность радиуса R; б) центры Земли O и корабля обращаются вокруг центра масс C по окружности радиуса $R/2$. Сила притяжения $F = GM^2/R^2 = mg$ (при $m = M$) направлена по линии центров, то есть к точке C. Второй закон Ньютона для корабля в проекции на направление к C:

$$m\frac{v^2}{R/2} = mg, \qquad v = \sqrt{\frac{gR}{2}},$$

$$T_b = \frac{2\pi\, R/2}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}} \approx 3{,}6\cdot 10^3 \text{ с} \approx 1 \text{ ч}.$$

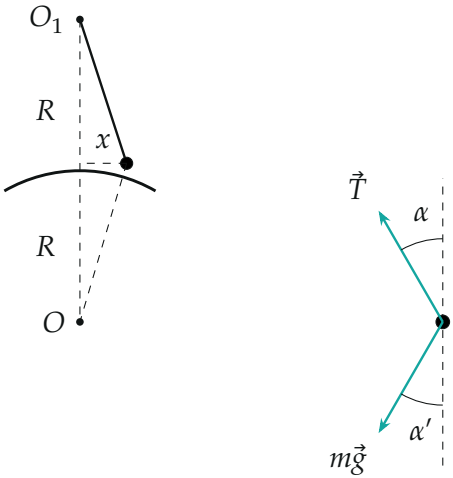
Проверка вторым способом: для двух тел с массами M и $m = M$ угловая скорость вращения линии центров $\omega^2 = \dfrac{G(M+m)}{R^3} = \dfrac{2GM}{R^3} = \dfrac{2g}{R}$,

откуда $T_b = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{2g}}$ — то же. Предел $m \to 0$ даёт случай а).

Задача 1.3.

5. Где находится груз. Вершина башни находится на высоте $\approx R$ над поверхностью, то есть на расстоянии $2R$ от центра Земли O, а нить длины R опускает груз к самой поверхности. При отклонении нити на угол α груз поднимается над поверхностью на $\delta = R - R\cos\alpha \approx \dfrac{R\alpha^2}{2}$ — величину второго порядка малости, и по правилу листа формул её отбрасываем: груз остаётся на расстоянии R от центра Земли. Значит, модуль силы тяжести по-прежнему mg, а направлена она к центру Земли O, а не вертикально вниз.

6. Силы на груз. Пусть груз сместился по горизонтали на малое $x = R\alpha$. Линия от груза к центру Земли отклонена от вертикали на угол α', причём $\tan\alpha' = x/R$, то есть $\alpha' \approx \alpha$. Сила тяжести направлена по этой линии, натяжение $\vec{T}$ — вдоль нити; обе горизонтальные составляющие направлены к положению равновесия.



Слева: геометрия (угол для наглядности увеличен). Справа: силы на груз крупно — натяжение $\vec{T}$ вдоль нити к O_1 и сила тяжести $m\vec{g}$ к центру Земли O; для малых углов $\alpha' \approx \alpha$. Угол между нитью (направление от груза к O_1) и силой тяжести равен $180° - (\alpha + \alpha') \approx 180° - 2\alpha$. Проекция

силы тяжести на нить против направления к O_1 равна $mg\cos(\alpha+\alpha')\approx mg\cos 2\alpha\approx mg$.

7. Уравнение движения. Груз движется по дуге окружности радиуса R с центром в O_1, подъём груза мал, поэтому его вертикальное ускорение второго порядка малости, а центростремительное v^2/R также мало. Вдоль нити сумма сил равна нулю: $T=mg\cos 2\alpha\approx mg$ (с точностью до первого порядка малости). Второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось x:

$$ma_x=-T\sin\alpha-mg\sin\alpha'\approx -mg\alpha-mg\alpha'\approx -2mg\alpha,\qquad \alpha\approx\frac{x}{R}.$$

Получаем

$$a_x=-\frac{2g}{R}x.$$

Обратите внимание: если бы груз висел в однородном поле тяжести, было бы $a_x=-\dfrac{g}{R}x$. Здесь возвращающая сила вдвое больше: сила тяжести направлена к центру Земли и тоже отклонена в сторону положения равновесия, а не вертикально вниз.

8. Период. Это уравнение гармонических колебаний $a_x=-\omega^2x$ с $\omega^2=2g/R$:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}=2\pi\sqrt{\frac{6{,}4\cdot10^6}{20}}\approx 3{,}6\cdot10^3\text{ с}\approx 1{,}0\text{ ч}.$$

Проверка вторым способом: движение по дуге вдоль касательной к ней. Касательное направление перпендикулярно нити, а угол между нитью и силой тяжести равен $180^\circ-2\alpha$, значит, проекция силы тяжести на касательную равна $mg\sin 2\alpha\approx 2mg\alpha$ и $mR\ddot\alpha=-2mg\alpha$, $\ddot\alpha=-\dfrac{2g}{R}\alpha$ — то же.

Ответ. 1.1.1) а) $\tau=\sqrt{2h/g}\approx 4{,}5$ с; б) $\tau=\sqrt{h/g}\approx 3{,}2$ с. 1.1.2) а) $v=\sqrt{2gh}\approx 45$ м/с; б) $v=2\sqrt{gh}\approx 63$ м/с. 1.2) а) $T=2\pi\sqrt{R/g}\approx 5{,}0\cdot10^3$ с ≈ 84 мин; б) $T=2\pi\sqrt{R/(2g)}\approx 3{,}6\cdot10^3$ с ≈ 1 ч. 1.3) $T=2\pi\sqrt{R/(2g)}\approx 3{,}6\cdot10^3$ с ≈ 1 ч.