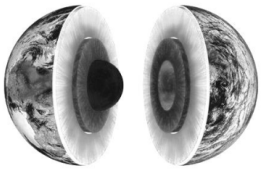
Магнитное динамо

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 11 класс, задача 2] **Магнитное динамо.**

Теория возникновения и существования магнитного поля Земли до настоящего времени окончательно не разработана. В данном задании вам предстоит проанализировать примитивную модель, на первый взгляд, позволяющую описать возникновение магнитного поля, благодаря эффекту магнитного динамо.



Не вызывает сомнений, что магнитное поле Земли существует благодаря, во-первых, наличию в ядре Земли хорошо проводящего слоя расплавленного железа, во-вторых, вращению Земли вокруг своей оси.

Рассмотрим следующую модель: тонкий цилиндрический слой проводящего вещества вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Обозначим внутренний радиус этого слоя R, а его толщину h, причём $h \ll R$, удельное электрическое сопротивление этого слоя равно ρ, диэлектрическими и магнитными свойствами слоя пренебрегаем $\varepsilon = \mu = 1$. Этот слой находится в непроводящей среде.

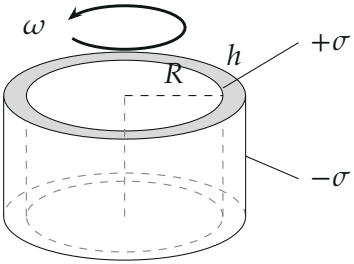


Рисунок условия: вращающийся цилиндрический слой; $+\sigma$ — на внутренней, $-\sigma$ — на внешней поверхности.

Основная идея генерации магнитного поля следующая. Пусть на внутренней поверхности слоя случайно возник электрический заряд, поверхностная плотность которого равна $+\sigma$, тогда на внешней поверхности появится равный по модулю электрический заряд с поверхностной плотностью $-\sigma$. При вращении слоя эти заряды создают магнитное поле, которое воздействует на электроны в проводящем слое, что может приводить к возникновению электрического тока между внутренней и внешней поверхностью рассматриваемого слоя, что, в свою очередь, может приводить к увеличению плотности зарядов и, как следствие, к усилению самого магнитного поля.

Подсказки. Если на боковой поверхности цилиндра находится равномерно распределённый заряд с поверхностной плотностью σ, то эти заряды создают радиальное электрическое поле у поверхности цилиндра, напряжённость которого равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Внутри цилиндра электрическое поле отсутствует. В данном задании можно считать, что модуль напряжённости электрического поля в рассматриваемом тонком слое постоянен и определяется формулой (1). Если по обмотке цилиндрического соленоида протекает электрический ток силы I, то этот ток внутри цилиндра создаёт однородное магнитное поле, направленное вдоль оси цилиндра, модуль которого равен

$$B = \mu_0 n I, \qquad (2)$$

где n — плотность намотки (число витков на единицу длины). Вне соленоида магнитное поле отсутствует.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Магнитная постоянная $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

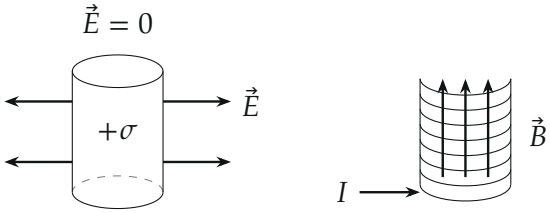


Рисунок условия (подсказки): электрическое поле заряженного цилиндра и магнитное поле соленоида.

Часть 1. Поле в слое. Для описания рассматриваемого явления введём декартову систему координат внутри слоя: ось x — радиально, перпендикулярно боковым поверхностям слоя; ось y — по касательной к внутренней поверхности слоя, перпендикулярно его оси; ось z — параллельно оси слоя; начало координат находится на внутренней поверхности слоя.

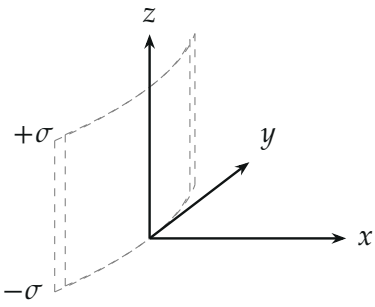


Рисунок условия: система координат внутри слоя (фрагмент слоя показан пунктиром).

1.1 В листе ответов укажите направления векторов: напряжённости электрического поля $\vec{E}$, индукции магнитного поля $\vec{B}$, скорости движения $\vec{v}$ в точке, находящейся внутри слоя на оси x.

1.2 Выразите модуль индукции магнитного поля внутри слоя B через поверхностную плотность зарядов σ, угловую скорость вращения ω и радиус слоя R.

1.3 В листе ответов укажите направления сил, действующих на электрон внутри слоя: $\vec{F}_E$ со стороны электрического поля, $\vec{F}_B$ — со стороны магнитного поля.

1.4 Укажите, чему равны модули сил $\vec{F}_E$ и $\vec{F}_B$.

Часть 2. Заряды и токи. В этой части массой электрона следует пренебречь.

2.1 Получите уравнение, описывающее изменение поверхностной плотности зарядов с течением времени $\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta t}$, включающее только характеристики проводящего слоя и физические постоянные.

2.2 Определите «критическую» скорость движения слоя $V^* = \omega^* R$, при превышении которой магнитное поле внутри слоя может возрастать с течением времени. Рассчитайте её численное значение.

Будем считать, что радиус слоя равен $R = 3{,}5 \cdot 10^6$ м (что равно радиусу ядра Земли), удельное электрическое сопротивление слоя $\rho = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$ Ом·м (сопротивление расплавленного железа).

2.3 Рассчитайте длительность суток на Земле, если скорость движения рассматриваемого слоя достигнет критической величины V^*.

2.4 Пусть поверхностная плотность зарядов на поверхностях слоя в некоторый момент равна σ_0. Оцените характерное время исчезновения этих зарядов, если угловая скорость вращения слоя равна угловой скорости вращения Земли.

Часть 3. Спасает ли модель масса электрона? В этой части вам необходимо модифицировать рассматриваемую модель с учётом массы электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг (заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Считайте, что рассматриваемый слой вращается с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли.

3.1 Покажите, что при учёте массы электрона возможно существование стационарных зарядов на поверхностях слоя. Получите формулу для поверхностной плотности этих зарядов.

3.2 Рассчитайте индукцию магнитного поля внутри слоя в этом случае. Сравните полученное значение со средним значением индукции магнитного поля на поверхности Земли $B_0 \approx 40$ мкТл.

3.3 Сделайте вывод: описывает ли рассмотренная модель механизм возникновения магнитного поля Земли?

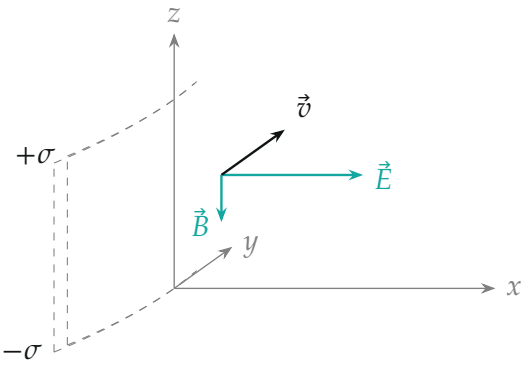
▲ **Решение. Что происходит.** Слой вращается вместе с заряженными поверхностями: движущийся заряд — это ток, а ток создаёт магнитное

поле (как в соленоиде). Это поле действует на электроны слоя силой Лоренца, а электрическое поле самих зарядов — электрической силой. Электрическая сила не зависит от скорости вращения, магнитная растёт как ω^2. Главная идея: плотность заряда σ меняется из-за тока поперёк слоя, а ток по закону Ома определяется суммой двух сил на электрон. От знака этой суммы зависит, растёт ли σ, а с ней и магнитное поле.

Обозначения. Ось x направлена радиально наружу, y — по скорости точек слоя, z — вдоль оси; как на рисунках условия, слой вращается против часовой стрелки при взгляде сверху ($\vec{\omega} \uparrow\uparrow z$). $v = \omega R$ — скорость слоя; $e > 0$ — модуль заряда электрона (заряд электрона $-e$). Толщина слоя $h \ll R$, поэтому радиусы обеих поверхностей считаем равными R.

Часть 1.

1. Направления $\vec{E}$, $\vec{v}$, $\vec{B}$ (п. 1.1). Поле зарядов: внутри слоя от $+\sigma$ (внутренняя поверхность) к $-\sigma$ (внешняя), то есть вдоль $+x$. Скорость точки слоя, лежащей на оси x, — по касательной к окружности, вдоль $+y$ (вращение против часовой стрелки). Магнитное поле создаёт вращающийся заряд. Внутренняя поверхность, заряженная $+\sigma$, поле в слое не создаёт: оно у неё только внутри полости, а слой лежит снаружи неё (вне соленоида поле отсутствует). Внешняя поверхность с зарядом $-\sigma$ создаёт однородное поле внутри себя, в том числе в слое. Отрицательный заряд движется против часовой стрелки, значит, ток течёт по часовой стрелке (при взгляде сверху), и по правилу правой руки $\vec{B}$ направлено вдоль $-z$.



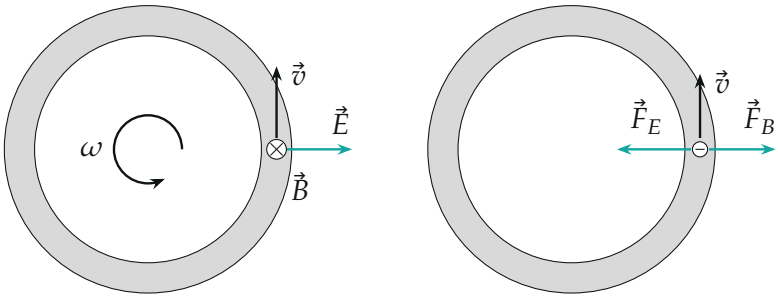
Векторы $\vec{E}$, $\vec{v}$, $\vec{B}$ в точке слоя на оси x (точка взята на высоте, чтобы стрелки не лежали на осях). Пунктир — поверхности слоя.

2. Индукция поля (п. 1.2). В формуле $B = \mu_0 nI$ величина nI — ток, приходящийся на единицу длины цилиндра вдоль оси. Заряженная поверхность, вращающаяся со скоростью $v = \omega R$, создаёт именно такой поверхностный ток: за время dt через отрезок поверхности единичной длины (вдоль оси) проходит заряд $\sigma v\, dt$. Значит, $nI = \sigma\omega R$ и

$$B = \mu_0 \sigma \omega R.$$

Обратите внимание: в слое поле даёт только внешняя поверхность. В полости внутри внутренней поверхности поля двух поверхностей почти вычитаются (разность $\mu_0\sigma\omega h \ll \mu_0\sigma\omega R$), поэтому поле сосредоточено в слое.

3. Силы на электрон (п. 1.3). Заряд электрона $-e$, поэтому электрическая сила $\vec{F}_E = -e\vec{E}$ направлена против $\vec{E}$, то есть вдоль $-x$ (к оси). Сила Лоренца $\vec{F}_B = -e\,\vec{v} \times \vec{B}$. С $\vec{v} = v\,\hat{y}$ и $\vec{B} = -B\,\hat{z}$ получаем $\vec{v} \times \vec{B} = -vB\,\hat{x}$, значит, $\vec{F}_B = +evB\,\hat{x}$: вдоль $+x$ (от оси). Силы направлены противоположно.



а) б)

Вид сверху (ось z направлена на нас). а) Векторы $\vec{E}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ (крестик в кружке — от нас, вдоль $-z$). б) Силы на электрон; длины стрелок условны: при реальных скоростях $F_B \ll F_E$.

4. Модули сил (п. 1.4). По определению напряжённости $F_E = eE =$

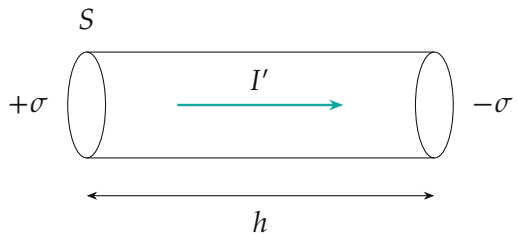
$\frac{e\sigma}{\varepsilon_0}$. Сила Лоренца при перпендикулярных $\vec{v}$ и $\vec{B}$

$$F_B = evB = e\,\omega R \cdot \mu_0\sigma\omega R = e\mu_0\sigma(\omega R)^2.$$

Отношение сил $F_B/F_E = \varepsilon_0\mu_0(\omega R)^2 = (\omega R/c)^2$, где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, безразмерно, и именно оно решит задачу.

Часть 2.

5. Уравнение для σ (п. 2.1). Заряд на поверхностях меняется только из-за тока поперёк слоя, вдоль оси x. Выделим внутри слоя тонкий цилиндр с осью вдоль x, площадью сечения S и длиной h (от внутренней поверхности до внешней).



Выделенный цилиндр: ток I' течёт поперёк слоя от внутренней поверхности к внешней. Электроны движутся под действием суммы двух сил; массой пренебрегаем, поэтому ток определяется законом Ома, а «напряжённость» в нём — сила на единицу заряда. Для проекции на x сила на положительный пробный заряд $(F_E - F_B)/e$ (положительному заряду электрическая сила направлена вдоль $+x$, магнитная — против). Такое «эффективное поле»

$$E_{\text{эф}} = \frac{F_E - F_B}{e} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \mu_0\sigma(\omega R)^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(1 - \varepsilon_0\mu_0(\omega R)^2),$$

и плотность тока (закон Ома в дифференциальной форме) $j = E_{\text{эф}}/\rho$. Ток через цилиндр $I' = jS$ течёт от внутренней поверхности к внешней и уносит положительный заряд с внутренней: за время Δt заряд σS на

торце выделенного цилиндра изменяется на $-I'\Delta t$:

$$\frac{\Delta(\sigma S)}{\Delta t} = -I' = -\frac{E_{\text{эф}}}{\rho}\,S.$$

Сократим S:

$$\boxed{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{\sigma}{\rho\varepsilon_0}\left(\varepsilon_0\mu_0(\omega R)^2 - 1\right)}$$

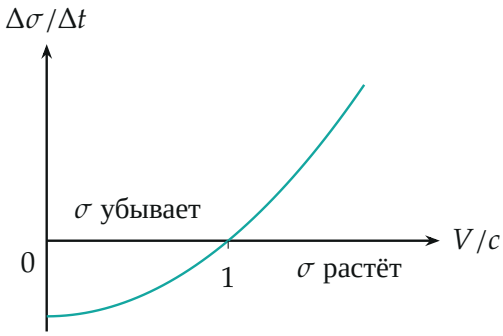
Тот же результат даёт эффективное напряжение $U_{\text{эф}} = (F_B - F_E)h/e$ и сопротивление цилиндра $r = \rho h/S$: $\Delta(\sigma S)/\Delta t = U_{\text{эф}}/r$. Проверка размерности: $\rho\varepsilon_0$ — Ом·м·Ф/м = Ом·Ф = с, то есть $\Delta\sigma/\Delta t$ имеет размерность $[\sigma]$/с.

6. Критическая скорость (п. 2.2). Знак скорости изменения σ определяет скобка. Заряды, а с ними и поле растут, если $\Delta\sigma/\Delta t > 0$:

$$\varepsilon_0\mu_0(\omega R)^2 > 1 \;\Rightarrow\; V^* = \omega^* R = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}},$$

$$V^* = \frac{1}{\sqrt{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}26\cdot 10^{-6}}} \approx 3{,}0\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Это скорость света c в вакууме. Физический смысл: магнитная сила станет больше электрической, только когда $F_B > F_E$, то есть $(\omega R/c)^2 > 1$.



Скорость изменения σ (при $\sigma > 0$) как функция V/c: убывание при $V < c$, рост при $V > c$. Подписи σ условны.

7. Длительность суток (п. 2.3). Условие $\omega^* R = c$ даёт $\omega^* = c/R$ и период

$$T = \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{2\pi R}{c} = \frac{2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^6}{3{,}0 \cdot 10^8} \approx 0{,}073 \text{ с}.$$

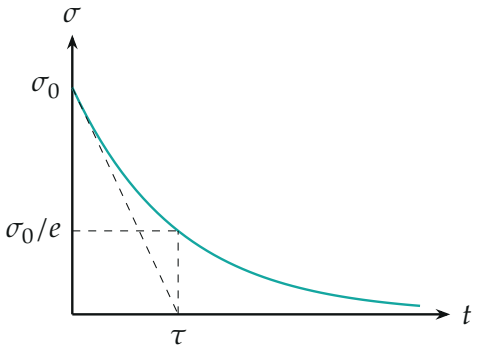
На поверхности Земли ($R_\oplus = 6{,}4 \cdot 10^6$ м) скорость точек была бы почти вдвое больше скорости света. Для реальных скоростей модель не работает.

8. Время исчезновения зарядов (п. 2.4). При вращении с реальной угловой скоростью Земли ($T = 24 \cdot 3600$ с)

$$V = \omega R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^6}{8{,}64 \cdot 10^4} \approx 2{,}5 \cdot 10^2 \text{ м/с},$$

$$\left(\frac{V}{c}\right)^2 \approx 7 \cdot 10^{-13} \ll 1.$$

Магнитной силой можно пренебречь, и уравнение п. 5 принимает вид $\Delta\sigma/\Delta t = -\sigma/(\rho\varepsilon_0)$. Скорость убывания пропорциональна самому заряду, значит, σ уменьшается по экспоненте: $\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}$.



Убывание заряда. Касательная в начале пересекает ось времени в точке τ, при $t = \tau$ заряд уменьшается в e раз. Характерное время — время, за которое заряд уменьшается в e раз; оно же равно отношению σ_0 к начальной скорости убывания $\sigma_0/(\rho\varepsilon_0)$:

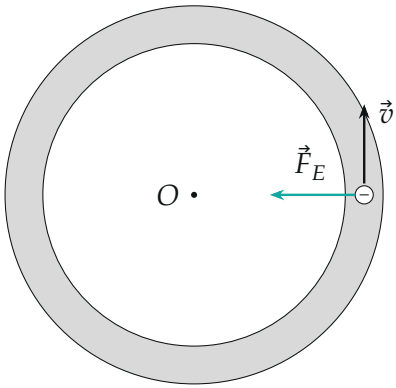
$$\tau = \rho\varepsilon_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-17} \text{ с}.$$

Заряды исчезают практически мгновенно (за время, много меньшее периода атомных колебаний), и магнитное поле создать не успеют.

Часть 3.

9. Стационарный заряд (п. 3.1). Если масса электрона не равна нулю, электроны слоя вращаются вместе с ним по окружности радиуса R, и им необходимо центростремительное ускорение $\omega^2 R$, направленное к оси, то есть вдоль $-x$. Его обеспечивает равнодействующая сил F_E (внутрь) и F_B (наружу). В стационарном состоянии радиального тока нет, и σ постоянна. Второй закон Ньютона для электрона в проекции на ось, направленную к оси слоя:

$$F_E - F_B = m_e\omega^2 R, \qquad \frac{e\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = m_e\omega^2 R.$$



Электрон в стационарном состоянии движется по окружности радиуса R; сила $\vec{F}_E$ сообщает ему центростремительное ускорение. Множитель $1 - V^2/c^2 \approx 1 - 7 \cdot 10^{-13}$ отличается от единицы на 10^{-12} и им можно пренебречь. Тогда

$$\bar{\sigma} = \frac{m_e}{e}\,\varepsilon_0\omega^2 R,$$

$$\bar{\sigma} \approx \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (7{,}3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{6} \approx 9 \cdot 10^{-25}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Обратите внимание: без массы электрона единственное стационарное

состояние — $\sigma = 0$; масса даёт ненулевой, но ничтожный стационарный заряд.

10. Магнитное поле (п. 3.2). По формуле п. 2

$$B = \mu_0 \bar{\sigma} \omega R = \frac{m_e}{e} \varepsilon_0 \mu_0 \, \omega^3 R^2,$$

$$B \approx 5{,}7 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-17} \cdot 4{,}7 \approx 3 \cdot 10^{-28} \text{ Тл}.$$

(С округлёнными $V = 2{,}5 \cdot 10^2$ м/с и $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с получается $2{,}8 \cdot 10^{-28}$ Тл.) Среднее поле на поверхности Земли $B_0 \approx 4 \cdot 10^{-5}$ Тл, значит, $B_0/B \approx 1{,}4 \cdot 10^{23}$: рассчитанное поле меньше земного на 23 порядка.

11. Вывод (п. 3.3). При реальной скорости вращения заряды исчезают за 10^{-17} с, а стационарное поле меньше земного в 10^{23} раз. Эффект возрастания поля мог бы возникнуть лишь при скорости слоя выше скорости света, что невозможно. Рассмотренная модель не описывает возникновение магнитного поля Земли.

Ответ. 1.1) $\vec{E} \uparrow\uparrow x$, $\vec{v} \uparrow\uparrow y$, $\vec{B} \uparrow\downarrow z$ (вдоль $-z$). 1.2) $B = \mu_0 \sigma \omega R$. 1.3) $\vec{F}_E$ вдоль $-x$, $\vec{F}_B$ вдоль $+x$. 1.4) $F_E = e\sigma/\varepsilon_0$, $F_B = e\mu_0\sigma(\omega R)^2$. 2.1) $\dfrac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \dfrac{\sigma}{\rho\varepsilon_0}(\varepsilon_0\mu_0(\omega R)^2 - 1)$. 2.2) $V^* = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c \approx 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с. 2.3) $T = 2\pi R/c \approx 0{,}073$ с. 2.4) $\tau = \rho\varepsilon_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^{-17}$ с. 3.1) $\bar{\sigma} = \dfrac{m_e}{e}\varepsilon_0\omega^2 R \approx 9 \cdot 10^{-25}$ Кл/м^2. 3.2) $B \approx 3 \cdot 10^{-28}$ Тл, на 23 порядка меньше B_0. 3.3) модель не описывает возникновение магнитного поля Земли.