Таутохронизм и принцип Ферма

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 11 класс, задача 3] **Таутохронизм и принцип Ферма.**

Принцип Ферма (принцип наименьшего времени Ферма) — постулат в геометрической оптике, согласно которому свет выбирает из множества путей между двумя точками тот путь, который потребует наименьшего времени. Этот принцип, сформулированный в I в. Героном Александрийским для отражения света, в общем виде был сформулирован Пьером Ферма в 1662 году в качестве самого общего закона геометрической оптики. (Википедия.)

Долгое время принцип Ферма считался мистическим: «Где у света такой мозг, который заранее может рассчитать путь кратчайшего времени?» Конечно, у света мозга нет, но докажите, что он есть у Вас!

В данном задании вам необходимо решить несколько оптических задач с помощью принципа Ферма. Будем считать, что законы отражения и преломления света Вам не известны, но Вы знаете и верите в принцип Ферма. Закон прямолинейного распространения света использовать разрешено.

Внимание! Решения, в которых явно используются законы отражения и преломления света, не рассматриваются и не оцениваются!

Во всех задачах, связанных с зеркалами и линзами, используйте параксиальное приближение, то есть считайте, что рассматриваемые лучи идут на малом расстоянии от оптической оси и под малыми углами к этой оси.

Часть 1. Математическое введение. Чтобы упростить математические выкладки при решении физических задач, используйте следующие математические формулы.

1.1 Докажите, что при $x \ll a$ справедлива приближённая формула

$$\sqrt{a^2 + x^2} \approx a + \frac{x^2}{2a}. \qquad (1)$$

Небольшую дугу окружности можно приближённо заменить участком параболы. Пусть центр окружности радиуса R лежит на оси y и

окружность касается оси x. Тогда уравнение соприкасающейся с окружностью в начале координат параболы имеет вид

$$y = \frac{x^2}{2R}. \qquad (2)$$

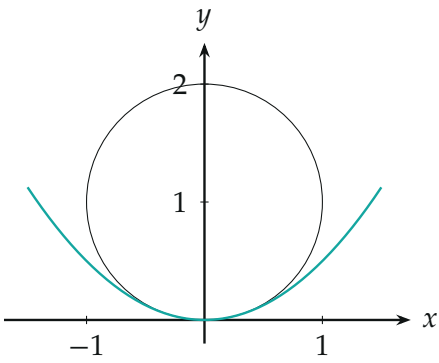


Рисунок условия: окружность единичного радиуса и соприкасающаяся с ней парабола.

1.2 Докажите формулу (2) для уравнения соприкасающейся параболы.

Даже если Вы не смогли доказать эти формулы, Вы имеете право использовать их в дальнейшем.

Часть 2. Таутохронизм. Таутохронизм означает постоянство времени. Частным случаем принципа Ферма является принцип таутохронизма. Этот принцип утверждает, что для любой оптической системы, формирующей изображение, время прохождения света от точечного источника A до его изображения A' вдоль любого луча одинаково. Иными словами, точка изображения — это точка A', время достижения которой от источника не зависит от траектории луча света.

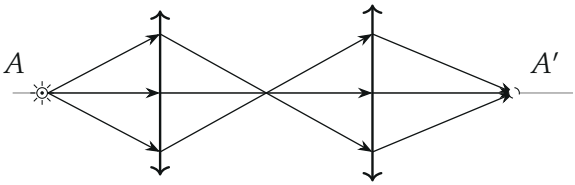


Рисунок условия: источник A, его изображение A' и ход лучей в системе из двух линз.

Задача 2.1. На рисунке показано вогнутое сферическое зеркало радиуса R: O — центр кривизны зеркала, C — его оптический центр; OC — главная оптическая ось зеркала.

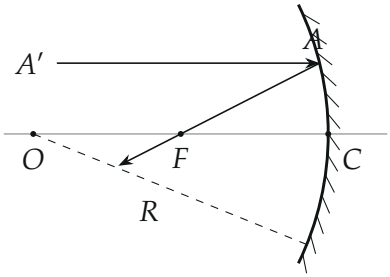


Рисунок условия к задаче 2.1.

2.1 Используя принцип таутохронизма, докажите, что все лучи $A'A$, параллельные главной оптической оси, после отражения от зеркала пересекутся в одной точке F, которая называется фокусом. Найдите фокусное расстояние зеркала $f = |FC|$.

Задача 2.2. На рисунке показана плосковыпуклая линза. Радиус сферической поверхности линзы равен R, показатель преломления материала линзы равен n. O — центр кривизны выпуклой поверхности; C — оптический центр линзы, OC — главная оптическая ось линзы.

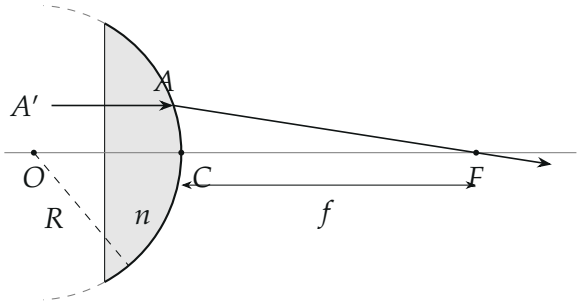


Рисунок условия к задаче 2.2.

2.2 Используя принцип таутохронизма, докажите, что все лучи $A'A$, параллельные главной оптической оси, после преломления в линзе пересекутся в одной точке F, которая называется фокусом. Найдите фокусное расстояние линзы $f = |FC|$.

Задача 2.3. На главной оптической оси вогнутого сферического зеркала радиуса R находится точечный источник света A на расстоянии $a = |AC|$ от оптического центра зеркала. Изображение этого источника находится в точке B на расстоянии $b = |BC|$ от оптического центра.

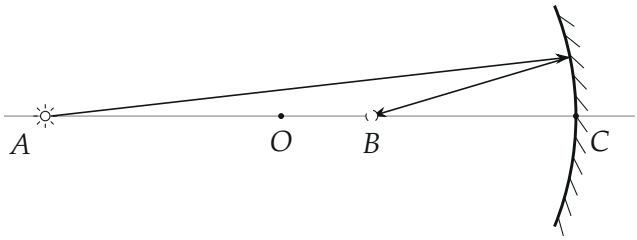


Рисунок условия к задаче 2.3.

2.3.1 Используя принцип таутохронизма, докажите, что зеркало формирует действительное изображение точечного источника.

2.3.2 Получите «формулу вогнутого зеркала», связывающую расстояния a и b и фокусное расстояние зеркала f.

Задача 2.4. Как известно, изображения могут быть мнимыми.

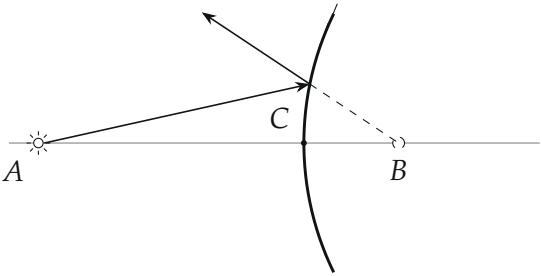


Рисунок условия к задаче 2.4: выпуклое зеркало.

2.4.1 Модернизируйте принцип таутохронизма так, чтобы с его помощью можно было рассчитывать положения мнимых изображений. (Приведите свою формулировку, доказательство не требуется.)

2.4.2 Покажите, что «формулу выпуклого зеркала», связывающую расстояние от точечного источника до оптического центра зеркала $a = |AC|$, расстояние от оптического центра до изображения этого источника $b = |CB|$ и фокусное расстояние зеркала, можно записать в том же виде, что и «формулу вогнутого зеркала», полученную в п. 2.3.2, если переопределить величины, входящие в эту формулу (укажите эти величины).

2.4.3 Несмотря на то что уважаемая «Википедия» называет рассматриваемый принцип Ферма постулатом (утверждением, не требующим доказательства), дайте словесное обоснование (не более 50 слов) принципа таутохронизма.

Часть 3. Принцип Ферма.

Задача 3.1. Точка A находится в среде с показателем преломления n_1, точка B — в среде с показателем преломления n_2. Луч света выходит из точки A и после преломления на плоской границе двух сред проходит через точку B.

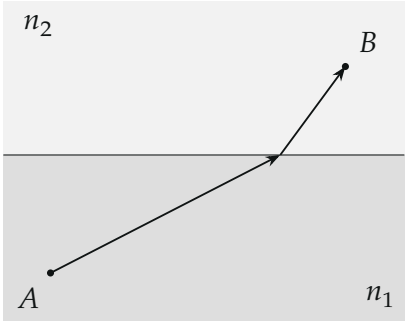


Рисунок условия к задаче 3.1.

3.1 Используя принцип Ферма, получите формулу для закона преломления света.

Задача 3.2. Рассмотрим отражение света от внутренней зеркальной поверхности цилиндрической трубки радиуса R в плоскости, перпендикулярной оси трубки (см. рис.). Рассмотрим все возможные траектории светового луча ACB. Точки A, B, C находятся на внутренней поверхности цилиндра. Центр сечения — точка O. Положение точки C задаётся углом φ. Угол $\angle AOB$ — прямой.

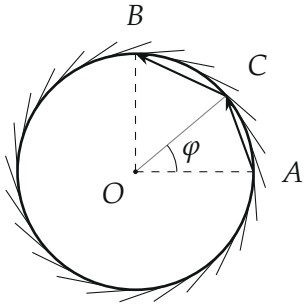


Рисунок условия к задаче 3.2: сечение трубки с зеркальной внутренней поверхностью.

3.2.1 Найдите зависимость длины траектории ACB от угла φ — $L(\varphi)$. Постройте схематический график этой зависимости для всех возможных значений φ.

3.2.2 Укажите, каким значениям угла φ соответствуют истинные траектории луча. Укажите эти значения на построенном графике $L(\varphi)$.

Задача 3.3. Выводы из проделанной работы.

3.3.1 Уточните формулировку принципа Ферма так, чтобы она описывала все рассмотренные в данном задании случаи движения луча света.

3.3.2 Дайте словесное обоснование принципа Ферма в общем случае (не более 50 слов).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Свет идёт по тому пути, время пробега по которому стационарно: при малом изменении траектории оно не меняется в первом порядке. В однородной среде равное время означает равную длину пути, в среде с показателем n участок длины l проходится за время nl/c, то есть «оптическая длина» равна nl. В частях 1 и 2 мы используем это для изображений: все лучи от источника A до изображения A' должны иметь одинаковую оптическую длину. В части 3 то же самое условие, записанное как равенство нулю производной длины пути по параметру траектории, даёт закон преломления и положение точки отражения. Все расчёты в зеркалах и линзах — в параксиальном приближении, то есть с точностью до величин порядка x^2 (малое расстояние x от оси).

Обозначения. x — расстояние от луча до главной оптической оси, y — «стрелка прогиба» поверхности (расстояние от точки поверхности

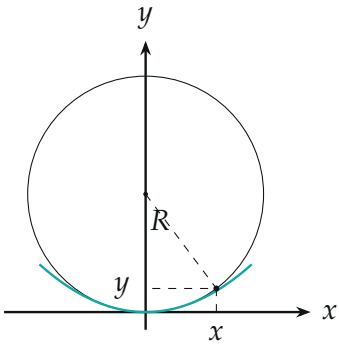
до касательной плоскости в вершине C), R — радиус кривизны, f — фокусное расстояние.

Часть 1.

1. Приближённая формула (п. 1.1). Вынесем a из-под корня и применим формулу $(1+u)^{1/2} \approx 1 + u/2$ при $|u| \ll 1$ (первый порядок разложения; производная $\sqrt{1+u}$ в нуле равна $1/2$), где $u = x^2/a^2 \ll 1$:

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} \approx a\Big(1+\frac{x^2}{2a^2}\Big) = a + \frac{x^2}{2a}.$$

2. Парабола вместо окружности (п. 1.2). Окружность радиуса R с центром $(0, R)$: $x^2 + (y-R)^2 = R^2$, откуда $x^2 + y^2 = 2Ry$.



Окружность и соприкасающаяся парабола: точка (x, y) лежит на обеих кривых с точностью до малых более высокого порядка. Пусть x мало. Тогда $y \sim x^2$ — второго порядка малости, а $y^2 \sim x^4$ — четвёртого, и $y^2 \ll x^2$. Отбрасываем y^2:

$$x^2 = 2Ry \;\Rightarrow\; y = \frac{x^2}{2R}.$$

Второй способ: выразим $y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ (знак «минус» выбираем, так как вблизи начала координат $y \to 0$) и применим формулу (1) при $a = R$ с заменой $x^2 \to -x^2$: $\sqrt{R^2-x^2} \approx R - \frac{x^2}{2R}$, откуда $y \approx \dfrac{x^2}{2R}$ — то же самое. Проверка: $R = 2$, $x = 1{,}2$: точное $y = 0{,}400$, парабола $y = 0{,}360$ — расхождение убывает как $(x/R)^2$.

Часть 2.

3. Как пользоваться таутохронизмом. Время равно оптической длине пути, делённой на c. Лучи от удалённого источника образуют параллельный пучок: любая плоскость, перпендикулярная оси, одинаково удалена от источника для всех лучей, поэтому путь можно отсчитывать от неё.

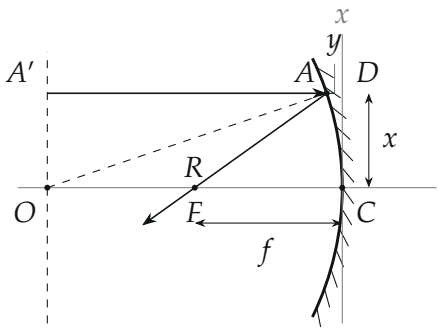
Задача 2.1.

4. Фокус зеркала (п. 2.1). Фокус — изображение бесконечно удалённой точки на оси: нужна точка F на оси, время до которой одно и то же для всех лучей. Среда однородная, значит, одинаковы длины путей. Возьмём плоскость, проходящую через центр кривизны O перпендикулярно оси. Луч, идущий вдоль оси, проходит от неё до вершины C путь R и после отражения доходит до F: полный путь $R+f$. Луч на расстоянии x от оси идёт от плоскости до точки зеркала A, находящейся на y ближе к ней, чем вершина, на расстоянии $R-y$ и затем от A до F (расстояние от A до оси x, по оси от A до F ещё $f-y$):

$$(R-y)+\sqrt{x^2+(f-y)^2}=R+f \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+(f-y)^2}=f+y.$$

Возведём в квадрат: $x^2+f^2-2fy+y^2=f^2+2fy+y^2$, откуда $x^2=4fy$, то есть

$$y=\frac{x^2}{4f}.$$



К п. 2.1: путь луча от плоскости $A'O$ до фокуса. D — проекция точки A зеркала на касательную плоскость в вершине, $x=|CD|$, $y=|AD|$. Значит,

всё сойдётся в одну точку на оси, если поверхность зеркала — парабола $y = x^2/(4f)$ (параболическое зеркало имеет фокус для лучей любой высоты). Окружность в параксиальном приближении — тоже парабола, $y = x^2/(2R)$ (п. 1.2). Приравнивая $\dfrac{x^2}{4f} = \dfrac{x^2}{2R}$, получаем: все лучи, параллельные оси, собираются в точке F, и

$$f = \frac{R}{2}.$$

Проверка: при $R = 5$, $x = 1{,}6$ точное $y = 0{,}263$, параболическое $0{,}256$; точный луч пересекает ось в $2{,}64$ вместо $2{,}5$ — расхождение порядка x^2/R^2.

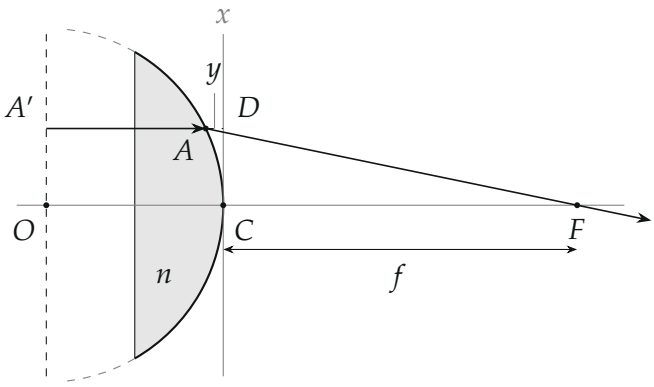
Задача 2.2.

5. Линза (п. 2.2). Луч, идущий параллельно оси, входит в плоскую грань линзы по нормали, и его направление не меняется; за плоскость отсчёта возьмём эту грань, для всех лучей путь до неё одинаков. Пусть толщина линзы на оси d. Луч на расстоянии x от оси проходит в стекле расстояние $d - y$ (там, где поверхность прогнута на y к грани), потом в воздухе от точки A до F, где F лежит на расстоянии f за вершиной C ($|AF| = \sqrt{x^2 + (f + y)^2}$). Оптическая длина вдоль оси равна $nd + f$. Условие таутохронизма:

$$n(d - y) + \sqrt{x^2 + (f + y)^2} = nd + f \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2 + (f + y)^2} = f + ny.$$

Возводим в квадрат: $x^2 + f^2 + 2fy + y^2 = f^2 + 2nfy + n^2y^2$. Слагаемые с y^2 имеют порядок x^4 и отбрасываются:

$$x^2 = 2(n - 1)fy \;\Rightarrow\; y = \frac{x^2}{2(n - 1)f}.$$



К п. 2.2: ход луча в плосковыпуклой линзе. Светлая область — стекло с показателем n; D — проекция точки A на касательную плоскость в вершине. Сфера радиуса R в параксиальном приближении даёт $y = x^2/(2R)$ (п. 1.2). Оба выражения имеют вид $y = \text{const} \cdot x^2$, и при

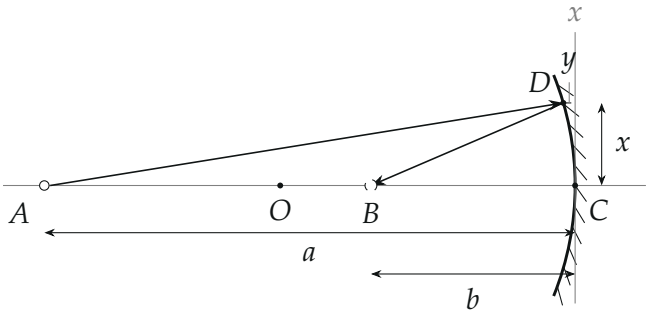
$$\frac{1}{2(n-1)f} = \frac{1}{2R} \;\Rightarrow\; f = \frac{R}{n-1}$$

все параллельные оси лучи сходятся в одной точке F. Проверка: при $n \to 1$ линза исчезает, $f \to \infty$.

Задача 2.3.

6. Изображение точечного источника (п. 2.3.1). Источник A лежит на оси на расстоянии a от вершины C, возможное изображение B — на оси на расстоянии b. Для луча вдоль оси путь $a + b$. Луч, падающий на зеркало в точке D на расстоянии x от оси, проходит $|AD| + |DB|$, при этом точка поверхности смещена от касательной плоскости к A на y:

$$\sqrt{x^2 + (a-y)^2} + \sqrt{x^2 + (b-y)^2} = a + b.$$



К п. 2.3: источник A, точка зеркала D и изображение B; $a = |AC|$, $b = |BC|$. Раскроем скобки под корнями и отбросим $y^2 \sim x^4$, сохраняя x^2 и y (оба порядка x^2): $\sqrt{a^2 + (x^2 - 2ay)}$ и аналогично для b. По формуле (1) с $x^2 \to (x^2 - 2ay)$:

$$a + \frac{x^2 - 2ay}{2a} + b + \frac{x^2 - 2by}{2b} = a + b \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2a} + \frac{x^2}{2b} - 2y = 0,$$

$$y = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{x^2}{4}.$$

Зеркало в параксиальном приближении имеет $y = x^2/(2R)$. Это совпадает по виду с найденным условием, поэтому равенство выполняется сразу для всех x, если b удовлетворяет уравнению из п. 2.3.2; изображение существует. Оно действительное, то есть лежит перед зеркалом, где свет реально проходит, если $b > 0$. Из формулы ниже $\dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{R} - \dfrac{1}{a} > 0$, когда $a > R/2 = f$ (источник дальше фокуса). При $a < f$ получилось бы $b < 0$: такого изображения нет, лучи расходятся (это мнимое изображение, п. 2.4).

7. Формула зеркала (п. 2.3.2). Приравниваем $y = \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\dfrac{x^2}{4}$ и $y = \dfrac{x^2}{2R}$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}.$$

Проверка: $a \to \infty$ даёт $b = R/2 = f$, как в п. 2.1; $a = R$ даёт $b = R$

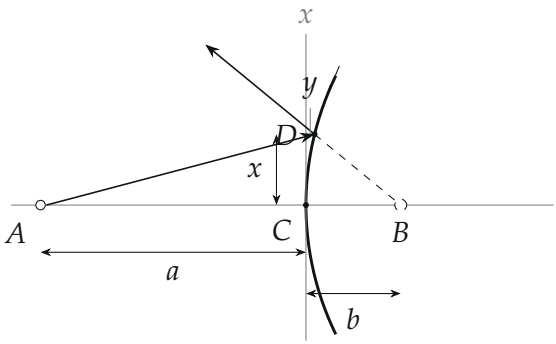
(источник в центре кривизны изображается там же); $a = f$ даёт $b \to \infty$ (параллельный пучок).

Задача 2.4.

8. Мнимое изображение (п. 2.4.1). У выпуклого зеркала отражённые лучи расходятся, пересекаются только их продолжения за зеркалом. Формулировка: *точка B является мнимым изображением источника A, если разность $|AD|-|DB|$ (длины отрезка от источника до точки D отражения и отрезка от D «назад» по продолжению отражённого луча до B) одинакова для всех лучей и равна $|AC|-|CB|$*. Иными словами, участок «за зеркалом» входит в оптическую длину пути со знаком «минус».

9. Формула выпуклого зеркала (п. 2.4.2). У выпуклой поверхности точка D отстоит от касательной плоскости в вершине C от источника на $y = x^2/(2R)$ (поверхность «убегает» от источника). Условие:

$$\sqrt{x^2 + (a+y)^2} - \sqrt{x^2 + (b-y)^2} = a - b.$$



К п. 2.4: выпуклое зеркало, $a = |AC|$, мнимое изображение B за зеркалом на расстоянии $b = |CB|$; пунктир — продолжение отражённого луча. Раскрываем скобки, отбрасываем y^2, применяем формулу (1):

$$\left(a + \frac{x^2}{2a} + y\right) - \left(b + \frac{x^2}{2b} - y\right) = a - b \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2a} - \frac{x^2}{2b} + 2y = 0.$$

Подставляем $y = x^2/(2R)$:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{2}{R}.$$

Эта формула совпадает с формулой вогнутого зеркала $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, если расстояние до мнимого изображения считать отрицательным, $b \to -b$ (то есть в формулу подставлять $b < 0$ для изображения за зеркалом), и фокусное расстояние выпуклого зеркала считать отрицательным: $f = -R/2$.

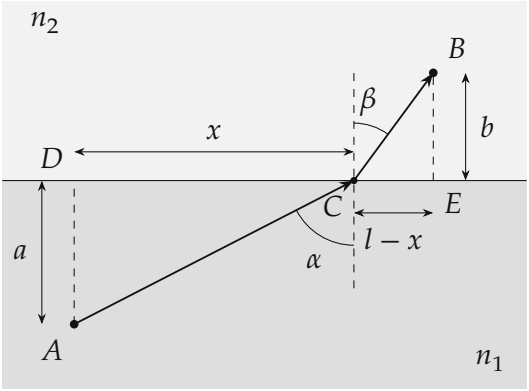
10. Обоснование таутохронизма (п. 2.4.3). Свет — волна. Каждому лучу соответствует волна, фаза которой определяется временем пробега. Если время пробега всех лучей от источника до точки A' одинаково, волны приходят в A' в одной фазе и складываются: возникает интерференционный максимум — изображение. (35 слов.)

Часть 3.

Задача 3.1.

11. Закон преломления (п. 3.1). Луч идёт из A в B через точку C границы. Все траектории ACB образуют семейство, параметр которого — положение точки C: расстояние $x = |DC|$ от основания перпендикуляра D. Скорость света в среде i равна c/n_i, время

$$\tau(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{c/n_2} = \frac{n_1\sqrt{a^2 + x^2} + n_2\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{c}.$$



К п. 3.1: a, b — расстояния от точек A, B до границы, $l = |DE|$, $x = |DC|$; α и β — углы лучей с нормалью к границе. По принципу Ферма на истинной траектории $\tau'(x) = 0$:

$$\tau'(x) = \frac{1}{c}\Big(\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{n_2(l-x)}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}\Big) = 0.$$

Из рисунка $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin\alpha$ и $\dfrac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}} = \sin\beta$, где α и β — углы лучей с нормалью к границе. Отсюда

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta.$$

Вторая производная $\tau'' > 0$ (сумма двух положительных слагаемых $\frac{na^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}$ и аналогичного), значит, найденная стационарная точка — минимум, как и предполагает исходный принцип наименьшего времени. Проверка: при $n_1 = n_2$ получаем $\alpha = \beta$, то есть прямую; на рисунке $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}5$, $a = 2$, $b = 1{,}5$, $l = 5$ дают $x = 3{,}90$, $\sin\alpha = 0{,}889$, $\sin\beta = 0{,}593$, и $1 \cdot 0{,}889 = 1{,}5 \cdot 0{,}593$.

Задача 3.2.

12. Длина траектории (п. 3.2.1). Пусть A имеет полярный угол 0, B — $\pi/2$, C — угол φ (как на рисунке). Длина хорды между точками с углами φ_1 и φ_2 равна $2R|\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}|$ (равнобедренный треугольник с углом при

вершине $|\varphi_1 - \varphi_2|$ и боковыми сторонами R). Поэтому

$$L(\varphi) = |AC| + |CB| = 2R\Big(\sin\frac{\varphi}{2} + \Big|\sin\Big(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)\Big|\Big), \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

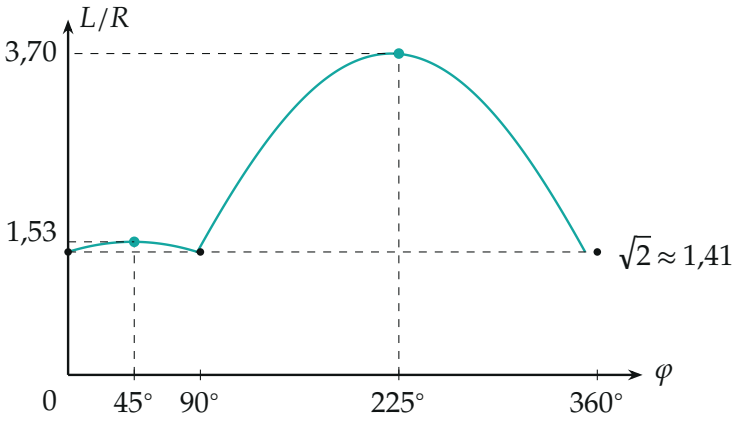
Раскроем модуль. При $0 \le \varphi \le \pi/2$ (точка C на меньшей дуге AB) и по формуле суммы синусов

$$L = 2R\Big(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\Big)\Big) = 4R\sin\frac{\pi}{8}\cos\Big(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{8}\Big);$$

при $\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$

$$L = 2R\Big(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\Big(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)\Big) = 4R\cos\frac{\pi}{8}\sin\Big(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{8}\Big).$$

Опорные значения: $L(0) = L(\pi/2) = L(2\pi) = \sqrt{2}R$ (это длина хорды AB: луч не отражается, а идёт прямо), $L(\pi/4) = 4R\sin\dfrac{\pi}{8} \approx 1{,}53R$, $L(5\pi/4) = 4R\cos\dfrac{\pi}{8} \approx 3{,}70R$. График — на рисунке: он состоит из двух «горбов», склеенных в точках $\varphi = 0,\ \pi/2$ с изломом.

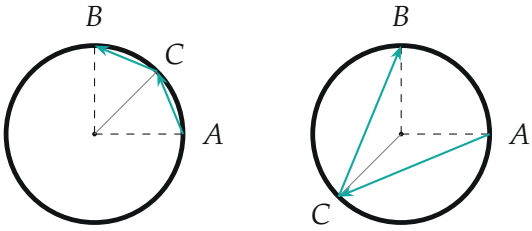


Длина траектории $L(\varphi)$ в единицах R. Точки: $\varphi = \pi/4$ и $5\pi/4$ — максимумы (истинные траектории), $\varphi = 0,\ \pi/2$ (и 2π) — изломы с минимумом $\sqrt{2}R$.

13. Истинные траектории (п. 3.2.2). По принципу Ферма истинными являются траектории с $L'(\varphi) = 0$. Из формул выше: на $[0, \pi/2]$ $L' =$

0 при $\varphi/2 = \pi/8$, то есть $\varphi = \pi/4$; на $[\pi/2, 2\pi]$ $L' = 0$ при $\varphi/2 - \pi/8 = \pi/2$, то есть $\varphi = 5\pi/4$. В точках $\varphi = 0, \pi/2$ производная не существует (излом) и в них точка отражения совпадает с A или B — это не отражения.

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$



а) $\varphi = 45°$ б) $\varphi = 225°$

Истинные траектории: C лежит посередине меньшей дуги AB (а) и посередине большей дуги (б); радиус OC делит угол ACB пополам. Обратите внимание: у обеих истинных траекторий длина не минимальна, а максимальна на своём участке: $\varphi = \pi/4$ — максимум на $[0, \pi/2]$, $\varphi = 5\pi/4$ — глобальный максимум. Поэтому «наименьшее время» в формулировке Ферма неточно; важно, чтобы длина была *стационарна*. Проверка: в обоих случаях C лежит на биссектрисе угла AOB, хорды AC и CB равны, радиус OC делит угол между падающим и отражённым лучами пополам — это и есть закон отражения, которым мы не пользовались.

Задача 3.3.

14. Уточнение принципа Ферма (п. 3.3.1). В части 2 время одинаково для всех лучей, в п. 3.1 минимально, в п. 3.2 максимально. Общая формулировка: *свет идёт между двумя точками по тем путям, для которых время прохождения (оптическая длина пути) стационарно — экстремально (минимально или максимально) или не зависит от траектории*. В математической записи: если траектория задаётся параметром ξ и оптическая длина есть $L(\xi)$, то истинным траекториям соответствуют ξ^*, для которых

$$L'(\xi^*) = 0.$$

15. Обоснование в общем случае (п. 3.3.2). Вблизи стационарной траектории длина пути меняется лишь на величину порядка $(\Delta\xi)^2$. Для широкого пучка соседних траекторий разность фаз волн, пришедших по ним, мала, и они складываются усиливая друг друга; вдали от стационарных траекторий фазы быстро расходятся, и волны гасят друг друга. (41 слово.)

Ответ. 1.1) доказано. 1.2) $y = x^2/(2R)$. 2.1) $f = R/2$. 2.2) $f = R/(n-1)$. 2.3.1) изображение есть, действительное при $a > R/2$. 2.3.2) $1/a + 1/b = 2/R = 1/f$. 2.4.1) путь «назад» по продолжению считается со знаком минус. 2.4.2) $1/a - 1/b = -2/R$: формула вогнутого при $b \to -b$, $f = -R/2$. 3.1) $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$. 3.2.1) $L = 2R(\sin\frac{\varphi}{2} + |\sin(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4})|)$. 3.2.2) $\varphi = \pi/4, 5\pi/4$ (максимумы L). 3.3.1) $L'(\xi^*) = 0$.