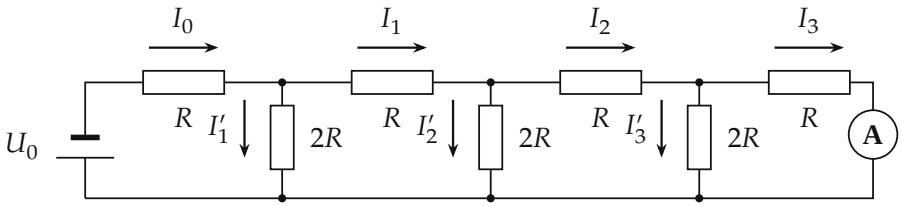
Как Уильям Томсон стал лордом Кельвином

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 9 класс, задача 1] Задание состоит из 4 логично связанных между собой задач. Уильям Томсон (1824–1907) — британский физик и инженер, известен работами в области механики, термодинамики, электродинамики. Одной из самых существенных его заслуг была разработка теории и усовершенствование трансатлантического кабеля. Данное задание касается теоретических проблем, связанных с распространением электрического тока по длинному проводящему кабелю с неидеальной изоляцией.

Часть 1. На рисунке показана электрическая цепь, состоящая из источника постоянного напряжения U_0 и семи резисторов, сопротивления которых указаны на рисунке. Сопротивление амперметра пренебрежимо мало.

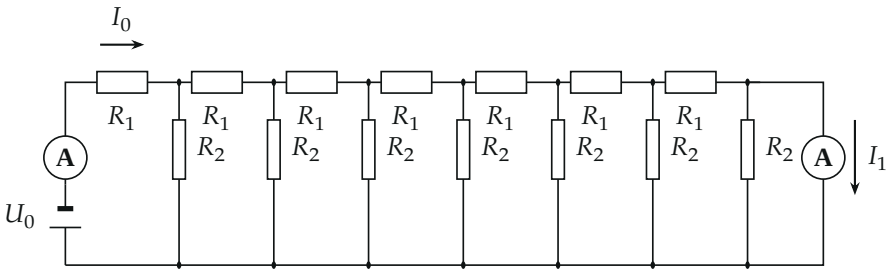


1.1 Рассчитайте значения сил токов через все резисторы, считая силу тока I_3 через амперметр известной.

1.2 Выразите значения сил токов I_0 и I_3 через напряжение источника U_0 и сопротивление R.

1.3 Рассчитайте численные отношения сил токов I_1/I_0 и I_2/I_1.

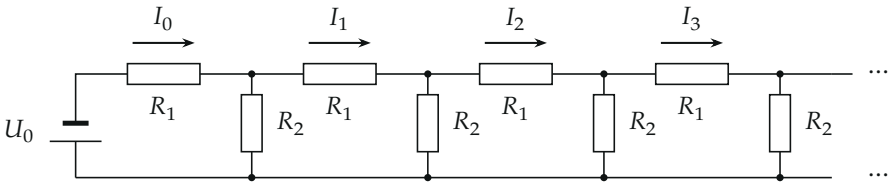
Часть 2. В цепи, показанной на рисунке, сопротивления $R_1 = 1{,}0$ Ом, а сопротивления $R_2 = 1{,}0$ кОм. Напряжение источника $U_0 = 7{,}0$ В. Амперметры идеальные.



2.1 Рассчитайте значения сил токов I_0 и I_1.

2.2 Рассчитайте разность сил токов $\Delta I = I_0 - I_1$.

Часть 3. Бесконечная цепочка, состоящая из одинаковых звеньев, подключена к источнику постоянного напряжения U_0. Пусть в бесконечной цепочке сопротивления резисторов равны $R_1 = R_0$, $R_2 = 2R_0$.



3.1 Найдите полное сопротивление цепи.

3.2 Покажите, что силы токов $I_0, I_1, I_2, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите отношение сил токов I_1/I_0.

3.3 Получите формулу, позволяющую рассчитать значения всех сил токов I_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ через заданные значения U_0 и R_0.

Пусть в бесконечной цепочке сопротивления R_2 в несколько тысяч раз больше сопротивлений R_1, что позволяет делать разумные приближения при расчётах.

3.4 Получите формулу для общего сопротивления всей цепочки при условии $R_2 \gg R_1$.

3.5 Получите формулу для расчёта силы тока в произвольном звене I_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ через заданные значения U_0, R_1, R_2.

Часть 4. Телеграфный кабель, который изучал У. Томсон, имел достаточно сложную структуру (см. рисунок): медная жила, резиновая изоляция, броневая защита.



Для расчётов существенно: диаметр медной жилы $d_0 = 20$ мм (удельное сопротивление меди $\rho_1 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м); толщина слоя резиновой изоляции $h = 10$ мм (удельное сопротивление резины $\rho_2 = 1{,}7 \cdot 10^{10}$ Ом·м); длина кабеля $L = 5000$ км. Кабель проложен по дну Атлантического океана, поэтому можно считать, что внешний слой изоляции контактирует с хорошо проводящей электрический ток морской водой. Несмотря на высокое удельное сопротивление изоляции, ток частично проходит через изоляционный слой и уходит в океанскую воду.

4.1 Рассчитайте электрическое сопротивление R_1 десяти километров ($\Delta l = 10$ км) медной жилы кабеля. Рассчитайте полное сопротивление медной жилы кабеля.

4.2 Рассчитайте (приближённо, но с хорошей точностью) электрическое сопротивление R_2 десяти километров изоляции кабеля. Рассчитайте полное сопротивление изоляции. Учтите направление тока в изоляции.

4.3 Предложите приближённую эквивалентную электрическую схему подводного телеграфного кабеля, описывающую протекание электрических токов в кабеле.

4.4 Рассчитайте отношение силы тока на выходе из кабеля I_1 к силе тока на его входе I_0.

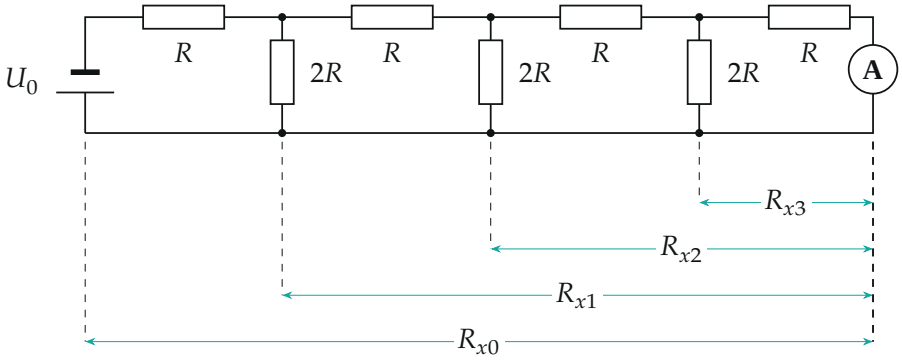
▲ **Решение. Что происходит.** Всё задание построено на одной идее: сложную цепь считают «с конца», а длинную одинаковую цепочку заменяют её же частью. В части 1 цепь из семи резисторов считают от амперметра к источнику. В части 2 утечками в ничтожные сопротивления пренебрегают и по первому приближению находят, сколько тока всё-таки утекло. В части 3 цепочка бесконечна: если отбросить первое звено, останется такая же цепочка, поэтому её сопротивление можно

найти из уравнения. В части 4 длинный кабель режут на звенья по 10 км, и он становится цепочкой из части 3.

Обозначения. В части 1 узлы нумеруем слева направо: узел k — точка, где ток I_{k-1} делится на ток утечки I'_k вниз через $2R$ и ток I_k дальше. Сопротивление части цепи справа от узла k (вместе с резистором R, стоящим сразу за ним) называем R_{xk}, а всей цепи — R_{x0}.

Часть 1.

Пункт 1.1. Начнём с правого края: там ток известен, и по закону Ома для участка цепи можно найти напряжение на следующем резисторе, потом ток утечки через параллельный резистор, потом по закону сохранения заряда (первое правило Кирхгофа) — ток в предыдущем звене, и так до источника.



Участки цепи, сопротивления которых считаем по очереди: каждый следующий участок содержит предыдущий как часть.

Первый шаг: участок R_{x3} — резистор R с идеальным амперметром (его сопротивление равно нулю):

$$R_{x3} = R.$$

Следующий участок R_{x2} — резистор R в последовательном соединении с параллельным соединением $2R$ и R_{x3} (оба присоединены к одним и тем же двум узлам, поэтому складываются проводимости):

$$R_{x2} = R + \frac{2R \cdot R_{x3}}{2R + R_{x3}} = R + \frac{2R}{3} = \frac{5}{3}R.$$

Так же:

$$R_{x1} = R + \frac{2R \cdot R_{x2}}{2R + R_{x2}} = R + \frac{10R/3}{11/3} = R + \frac{10}{11}R = \frac{21}{11}R,$$

$$R_{x0} = R + \frac{2R \cdot R_{x1}}{2R + R_{x1}} = R + \frac{42R/11}{43/11} = R + \frac{42}{43}R = \frac{85}{43}R.$$

Теперь токи. Ток I_3 идёт через последний резистор R и амперметр (напряжения на амперметре нет), поэтому напряжение между проводами в узле 3 равно

$$U_3 = I_3 R.$$

Это же напряжение приложено к резистору $2R$, через который идёт ток утечки I'_3:

$$I'_3 = \frac{U_3}{2R} = \frac{1}{2}I_3.$$

Ток I_2 в предыдущем резисторе разветвляется в узле 3 на I_3 и I'_3 (сохранение заряда: сколько тока втекло в узел, столько и вытекло):

$$I_2 = I_3 + I'_3 = \frac{3}{2}I_3.$$

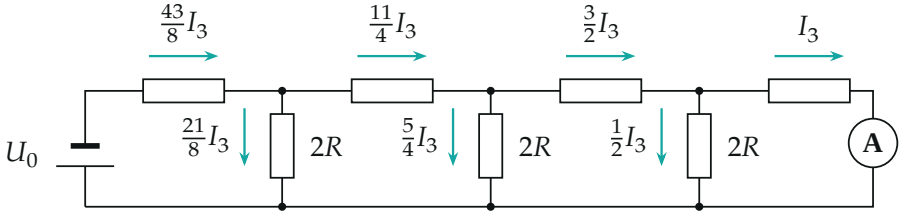
Напряжение в узле 2 равно сумме U_3 и падения напряжения на резисторе R с током I_2 (закон Ома для участка и последовательное соединение):

$$U_2 = U_3 + I_2 R = \left(1 + \frac{3}{2}\right) I_3 R = \frac{5}{2}I_3 R,$$

$$I'_2 = \frac{U_2}{2R} = \frac{5}{4}I_3, \qquad I_1 = I_2 + I'_2 = \frac{11}{4}I_3.$$

Шаг дальше:

$$U_1 = U_2 + I_1 R = \frac{21}{4}I_3 R, \qquad I'_1 = \frac{U_1}{2R} = \frac{21}{8}I_3, \qquad I_0 = I_1 + I'_1 = \frac{43}{8}I_3.$$



Токи всех резисторов в единицах I_3: у каждой стрелки — её сила тока.

Пункт 1.2. Сопротивление всей цепи — R_{x0}, поэтому по закону Ома для всей цепи

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{x0}} = \frac{43}{85}\frac{U_0}{R}.$$

Из связи $I_0 = \dfrac{43}{8}I_3$ следует

$$I_3 = \frac{8}{43}I_0 = \frac{8}{85}\frac{U_0}{R}.$$

(Тот же результат даёт напряжение источника $U_0 = U_1 + I_0R = \frac{85}{8}I_3R$.)

Пункт 1.3.

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{11/4}{43/8} = \frac{22}{43} \approx 0{,}51, \qquad \frac{I_2}{I_1} = \frac{3/2}{11/4} = \frac{6}{11} \approx 0{,}55.$$

Каждое звено «забирает» чуть меньше половины тока: больше половины остаётся для дальнейших звеньев.

Часть 2.

Что происходит. Сопротивления R_2 в тысячу раз больше R_1, поэтому почти весь ток идёт по цепочке из семи резисторов R_1, а через R_2 утекает малая добавка. Данные заданы с двумя значащими цифрами, и рассчитывать надо с такой же точностью.

Пункт 2.1. Если пренебречь утечками, по семи последовательным резисторам R_1 идёт один и тот же ток:

$$I_0 \approx I_1 = \frac{U_0}{7R_1} = \frac{7{,}0\ \text{В}}{7 \cdot 1{,}0\ \text{Ом}} = 1{,}0\ \text{А}.$$

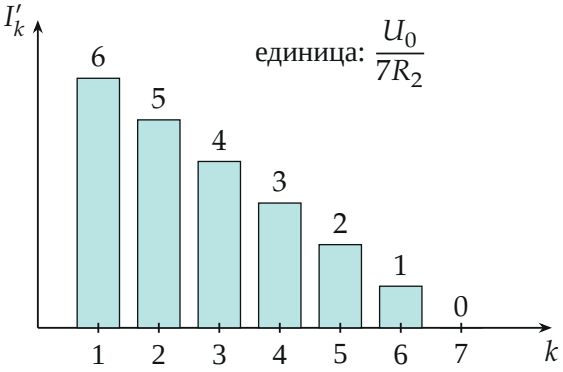
Проверка допущения будет в конце пункта 2.2: утечка окажется порядка 2% от I_0, то есть меньше погрешности данных.

Пункт 2.2. Разность $\Delta I = I_0 - I_1$ — это ток, ушедший из цепочки через все резисторы R_2 (сохранение заряда). Узлы нумеруем $k = 1, \ldots, 7$ от источника. В нулевом приближении напряжение на k-м резисторе R_2 (относительно нижнего провода) равно напряжению источника минус падения на k резисторах R_1 с током $I_0 = U_0/(7R_1)$:

$$U'_k = U_0 - I_0 R_1 k = \frac{U_0}{7}(7 - k).$$

Ток утечки через k-й резистор R_2 (закон Ома для участка):

$$I'_k = \frac{U'_k}{R_2} = \frac{U_0}{7R_2}(7 - k).$$



Токи утечки I'_k в единицах $U_0/(7R_2)$: линейно убывают от 6 до 0, потому что напряжение вдоль цепочки падает линейно. Сумма столбцов равна 21.

Суммируем (сумма $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 21$):

$$\Delta I = \sum_{k=1}^{7} I'_k = \frac{U_0}{7R_2} \cdot 21 = \frac{3U_0}{R_2} = \frac{3 \cdot 7{,}0\ \text{В}}{1000\ \text{Ом}} = 2{,}1 \cdot 10^{-2}\ \text{А} = 21\ \text{мА}.$$

Утечка составляет около 2% от тока 1 А, поэтому пренебрежение ею в пункте 2.1 законно.

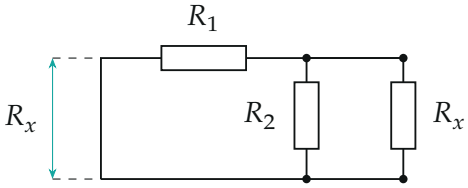
Обратите внимание. В официальном тексте решения получено $\Delta I = U_0/(3R_2) = 0{,}33$ мА: это не следует из формул самого решения (сумма равна $21U_0/(7R_2) = 3U_0/R_2$, а не $U_0/(3R_2)$; да и $U_0/(3R_2)$ — это 2,3 мА, а не 0,33 мА) и расходится с численным расчётом.

Проверка. Точный расчёт всей цепи на компьютере даёт $I_0 = 1{,}013$ А, $I_1 = 0{,}992$ А, $\Delta I = 20{,}9$ мА — совпадает с 21 мА. Размерность: U_0/R_2 — ампер.

Часть 3.

Что происходит. Цепочка бесконечна: если мысленно убрать первое звено, оставшаяся цепочка такая же, поэтому её сопротивление то же самое, R_x. Это даёт уравнение для R_x. Дальше то же свойство даёт связь соседних токов.

Пункт 3.1. Сопротивление всей цепочки обозначим R_x. Схема: первое звено R_1 последовательно с параллельным соединением R_2 и оставшейся цепочки (её сопротивление тоже R_x).



Эквивалентная схема: бесконечная цепочка равна первому звену, за которым стоит та же цепочка. Слева — сопротивление всей цепочки R_x.

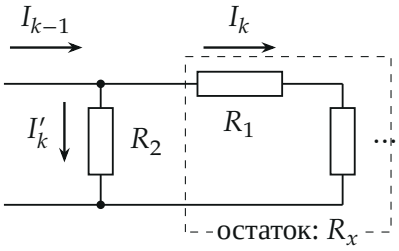
$$R_x = R_1 + \frac{R_x R_2}{R_x + R_2}.$$

Освобождаясь от знаменателя: $R_x^2 - R_x R_1 - R_1 R_2 = 0$. Отрицательное сопротивление смысла не имеет, берём положительный корень:

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}.$$

При $R_1 = R_0$, $R_2 = 2R_0$: $R_x = \dfrac{R_0 + 3R_0}{2} = 2R_0$.

Пункт 3.2. Рассмотрим узел k: ток I_{k-1} приходит в него и делится на ток утечки I'_k через R_2 и ток I_k, уходящий дальше. «Дальше» — это остаток цепочки вместе со своим первым резистором R_1, его сопротивление равно R_x.



Токи в узле k: утечка I'_k вниз и ток I_k в остаток цепочки.

Напряжение в узле k одно и то же для обеих ветвей: на R_2 оно равно $I'_k R_2$, на остатке цепочки $I_k R_x$. Вместе с сохранением заряда в узле:

$$I_{k-1} = I_k + I'_k, \qquad I_k R_x = I'_k R_2.$$

Исключаем $I'_k = I_k R_x / R_2$:

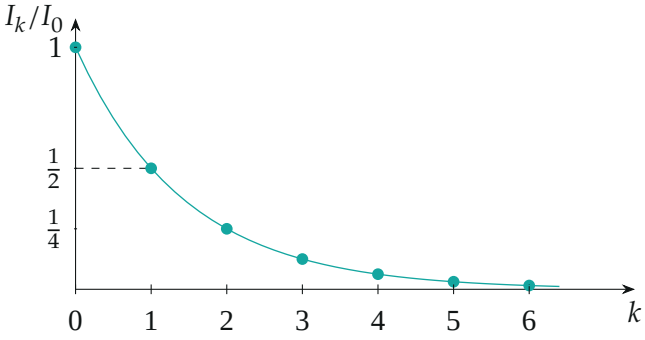
$$I_{k-1} = I_k \left(1 + \frac{R_x}{R_2}\right) \;\Rightarrow\; I_k = \gamma I_{k-1}, \qquad \gamma = \left(1 + \frac{R_x}{R_2}\right)^{-1}.$$

Отношение соседних токов одно и то же для любого k, значит, токи образуют геометрическую прогрессию, $I_k = \gamma^k I_0$, а $I_0 = U_0/R_x$ (закон Ома для всей цепочки). При $R_x = 2R_0$, $R_2 = 2R_0$:

$$\gamma = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Пункт 3.3. Подставляем $I_0 = \dfrac{U_0}{2R_0}$ и $\gamma = \dfrac{1}{2}$:

$$I_k = \frac{U_0}{2R_0} \cdot 2^{-k}.$$



После каждого звена ток уменьшается вдвое: точки лежат на показательной кривой 2^{-k}.

Пункт 3.4. При $R_2 \gg R_1$ под корнем в формуле для R_x главное слагаемое — $4R_1R_2$, а R_1 рядом с корнем мало:

$$R_x = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2} \approx \sqrt{R_1R_2}.$$

Пункт 3.5. Токи по-прежнему образуют геометрическую прогрессию с $I_0 = U_0/R_x$. Знаменатель при $R_x/R_2 = \sqrt{R_1/R_2} \ll 1$ (по формуле $(1+\varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$ при $\varepsilon \ll 1$):

$$\gamma = \left(1 + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^{-1} \approx 1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Итог:

$$I_k \approx \frac{U_0}{\sqrt{R_1R_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^k.$$

Обратите внимание. Сопротивление уходящего вправо «хвоста» при $R_2 \gg R_1$ — это не R_1 и не R_2, а их среднее геометрическое: ток частично уходит через R_2, но проходит и много звеньев R_1.

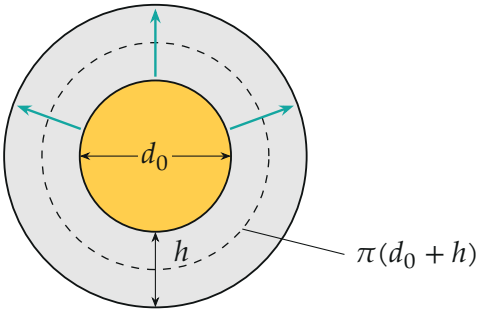
Проверка. При $R_2 = 2R_1$ точные формулы дали $R_x = 2R_1$ и $\gamma = \frac{1}{2}$; приближение даёт $\sqrt{2}R_1 \approx 1{,}41R_1$ и $\gamma \approx 0{,}29$, то есть при таком отношении оно не работает — как и должно быть, ведь условие $R_2 \gg R_1$

нарушено. Для $R_2/R_1 = 10^4$: точное $R_x/\sqrt{R_1R_2} = 1 + 0{,}005$, ошибка 0,5%.

Часть 4.

Что происходит. Ток в кабеле идёт вдоль медной жилы, и понемногу уходит поперёк, через резиновую изоляцию, в морскую воду (она проводит хорошо, её сопротивлением пренебрегаем). Разрежем кабель на куски по $\Delta l = 10$ км: в каждом куске продольное сопротивление — это R_1 жилы, а утечка — это R_2 изоляции, присоединённое между жилой и водой. Получается цепочка из части 3.

Обозначения. $r_0 = d_0/2$ — радиус жилы; $r_0 + h$ — внешний радиус изоляции; R_1 — сопротивление жилы длиной Δl; R_2 — сопротивление изоляции на том же куске; $N = L/\Delta l = 500$ — число звеньев.



Сечение кабеля: жила диаметром d_0, слой изоляции толщиной h. Бирюзовые стрелки — ток утечки, он идёт поперёк слоя, от жилы наружу. Штриховая окружность — середина слоя, её длина $\pi(d_0 + h)$.

Пункт 4.1. Сопротивление медной жилы длиной Δl (ток идёт вдоль, сечение — круг диаметром d_0):

$$R_1 = \rho_1 \frac{4\Delta l}{\pi d_0^2} = 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{4 \cdot 10^4}{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} \approx 0{,}54 \text{ Ом}.$$

Все $N = 500$ кусков жилы соединены последовательно, поэтому полное сопротивление жилы

$$R_{1\Sigma} = R_1 \frac{L}{\Delta l} = 0{,}54 \cdot 500 \text{ Ом} \approx 270 \text{ Ом}.$$

Пункт 4.2. Ток утечки идёт не вдоль кабеля, а от жилы к воде, поперёк слоя изоляции: длина пути — толщина слоя h, а площадь сечения тока растёт по мере удаления от оси. Берём приближённо площадь на половине толщины слоя: цилиндр радиуса $r_0 + h/2$ и высоты Δl, его боковая поверхность

$$S = 2\pi\left(\frac{d_0}{2} + \frac{h}{2}\right)\Delta l = \pi(d_0 + h)\Delta l.$$

Тогда

$$R_2 = \rho_2\frac{h}{S} = \rho_2\frac{h}{\pi(d_0 + h)\Delta l} =$$

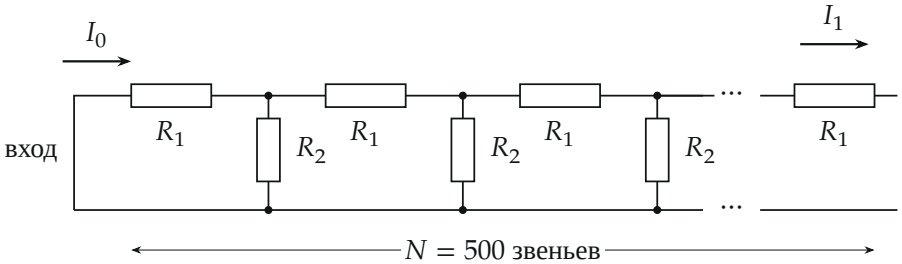
$$= 1{,}7 \cdot 10^{10} \cdot \frac{10^{-2}}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4} \approx 1{,}8 \cdot 10^5 \text{ Ом}.$$

Утечки всех 500 кусков присоединены параллельно (все между жилой и водой), поэтому полное сопротивление изоляции в 500 раз меньше:

$$R_{2\Sigma} = \frac{R_2}{N} \approx \frac{1{,}8 \cdot 10^5}{500} \text{ Ом} \approx 360 \text{ Ом}.$$

(Точный расчёт для слоя, у которого площадь меняется с радиусом, даёт $R_2 = \dfrac{\rho_2}{2\pi\Delta l}\ln\dfrac{d_0 + 2h}{d_0} = 1{,}9 \cdot 10^5$ Ом, $R_{2\Sigma} \approx 375$ Ом: приближённая формула верна с точностью 4%.)

Пункт 4.3. Каждое звено цепочки — это резистор R_1 вдоль жилы и резистор R_2 от жилы к воде (общий провод — океан). Цепочка из $N = 500$ таких звеньев — та же цепочка, что в части 3.



Эквивалентная схема кабеля: цепочка из звеньев по $\Delta l = 10$ км. $R_1 \approx 0{,}54$ Ом, $R_2 \approx 1{,}8 \cdot 10^5$ Ом.

Пункт 4.4. Токи в звеньях образуют геометрическую прогрессию (пункт 3.5), а $R_2 \gg R_1$ ($R_2/R_1 \approx 3 \cdot 10^5$). Сила тока на выходе — ток после N звеньев. Считаем, что приёмник на конце подобран так, что цепочка за последним звеном ведёт себя как продолжение такой же (так, как в части 3):

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\right)^N.$$

Отношение сопротивлений для куска длиной Δl (подставляем R_1 и R_2 из пунктов 4.1 и 4.2):

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \sqrt{\frac{4\rho_1 \Delta l}{\pi d_0^2} \cdot \frac{\pi(d_0+h)\Delta l}{\rho_2 h}} = \alpha \Delta l, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{4(d_0+h)}{d_0^2 h}}.$$

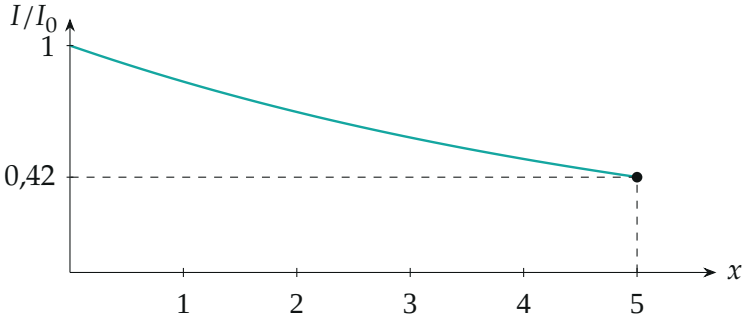
Числа: $\rho_1/\rho_2 = 10^{-18}$; $\dfrac{4(d_0+h)}{d_0^2 h} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^4$ м$^{-2}$; значит,

$$\alpha = \sqrt{3 \cdot 10^{-14}}\ \text{м}^{-1} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{м}^{-1}.$$

Тогда при $\Delta l = 10$ км $\alpha \Delta l = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ и

$$\frac{I_1}{I_0} = (1 - \alpha \Delta l)^{L/\Delta l} = (1 - 1{,}7 \cdot 10^{-3})^{500} \approx 0{,}42.$$

Результат не зависит от выбора Δl при $\alpha \Delta l \ll 1$: при $\Delta l \to 0$ получаем $(1 - \alpha \Delta l)^{L/\Delta l} \to e^{-\alpha L} = e^{-0{,}87} \approx 0{,}42$.



Спад тока вдоль кабеля, $I = I_0 e^{-\alpha x}$ (x в тысячах километров): на длине 5000 км остаётся 42%.

Сила тока уменьшилась примерно в 2,4 раза: значит, утечка через изоляцию не была главной причиной неработоспособности кабеля.

Обратите внимание. В официальном решении получено $R_2 = 1{,}1 \cdot 10^5$ Ом, $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-7}$ м$^{-1}$ и $I_1/I_0 = 0{,}082$. Эти значения не следуют из данных условия и формул самого решения ($h = 10$ мм, $d_0 = 20$ мм): подстановка в формулу α даёт $1{,}6 \cdot 10^{-7}$–$1{,}7 \cdot 10^{-7}$ м$^{-1}$. Проверка численно и два способа вычисления R_2 дают 0,42–0,43.

Проверка. Размерность: α имеет размерность 1/м, αL безразмерна. Предел: при отсутствии утечки ($\rho_2 \to \infty$) $\alpha \to 0$ и $I_1/I_0 \to 1$. Масштаб: $1/\alpha \approx 5800$ км — расстояние, на котором ток убывает в e раз.

Ответ. 1.1) $I_0 = \frac{43}{8} I_3$, $I_1 = \frac{11}{4} I_3$, $I_2 = \frac{3}{2} I_3$, $I_1' = \frac{21}{8} I_3$, $I_2' = \frac{5}{4} I_3$, $I_3' = \frac{1}{2} I_3$; 1.2) $I_0 = \dfrac{43U_0}{85R}$, $I_3 = \dfrac{8U_0}{85R}$; 1.3) $\dfrac{I_1}{I_0} = \dfrac{22}{43} \approx 0{,}51$, $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{6}{11} \approx 0{,}55$; 2.1) $I_0 \approx I_1 \approx 1{,}0$ А; 2.2) $\Delta I = \dfrac{3U_0}{R_2} \approx 21$ мА; 3.1) $R_x = 2R_0$; 3.2) $I_1/I_0 = \frac{1}{2}$; 3.3) $I_k = \dfrac{U_0}{2R_0} 2^{-k}$; 3.4) $R_x \approx \sqrt{R_1 R_2}$; 3.5) $I_k \approx \dfrac{U_0}{\sqrt{R_1 R_2}} \left(1 - \sqrt{R_1/R_2}\right)^k$; 4.1) $R_1 \approx 0{,}54$ Ом, $R_{1\Sigma} \approx 270$ Ом; 4.2) $R_2 \approx 1{,}8 \cdot 10^5$ Ом, $R_{2\Sigma} \approx 360$ Ом; 4.3) цепочка звеньев R_1 вдоль жилы и R_2 от жилы к воде; 4.4) $I_1/I_0 \approx 0{,}42$.