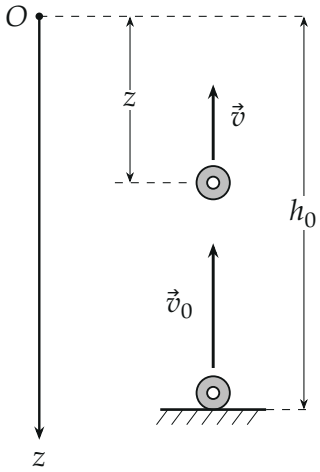
Вытекание

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 9 класс, задача 2] **Часть 1. Бросок.** В данной части необходимо описать движение тела, брошенного вертикально вверх, в не совсем обычной системе координат. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Небольшой шарик брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Обозначим максимальную высоту подъёма шарика h_0. Введём ось координат z, направленную вертикально вниз, начало отсчёта которой совпадает с максимальной высотой подъёма. Далее под скоростью v_z и ускорением a_z подразумеваются проекции скорости и ускорения шарика на ось z.



1.1 Выразите максимальную высоту подъёма шарика h_0 через начальную скорость v_0 и ускорение свободного падения g.

1.2 Чему равны проекции ускорения и начальной скорости шарика на ось z: a_z, v_{0z}?

1.3 Найдите зависимость скорости шарика v_z от координаты z: $v_z(z)$.

1.4 Найдите зависимость координаты шарика z от времени $z(t)$. В качестве параметров этой функции используйте только начальную скорость v_0 и ускорение свободного падения g.

1.5 Постройте схематический график зависимости $z(t)$. Укажите характерные точки этого графика.

Обозначим $\tau_{0,5}$ («время полуподъёма») время, за которое шарик поднимается на высоту $h_0/2$, равную половине максимальной высоты. Это время может быть выражено через максимальную высоту подъёма h_0 и ускорение свободного падения следующим образом:

$$\tau_{0,5} = C\, h_0^{\alpha}\, g^{\beta}, \qquad (1)$$

где C — некоторый безразмерный численный коэффициент, α, β — постоянные показатели степеней.

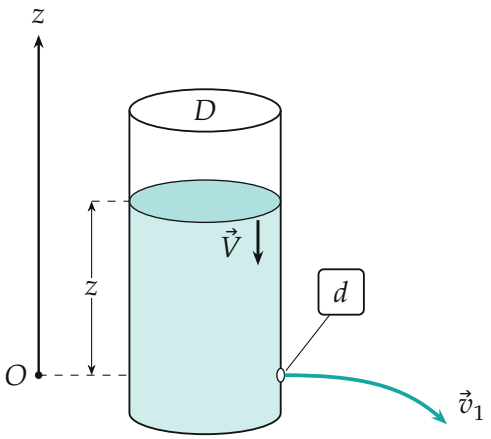
1.6 Найдите значения показателей степеней α, β в формуле (1).

1.7 Рассчитайте численное значение коэффициента C в формуле (1).

Часть 2. Дырявый сосуд. В данной части необходимо описать процесс вытекания жидкости из сосуда, в стенке которого имеется небольшое отверстие.

В боковой стенке вертикального цилиндрического сосуда с диаметром поперечного сечения D проделали малое круглое отверстие диаметра d вблизи дна сосуда. Обозначим отношение этих диаметров $\eta = d/D \ll 1$.

В сосуд наливают воду. Уровень воды z в сосуде отсчитывается от середины отверстия. Ось z направлена вертикально вверх. Считайте, что диаметр отверстия значительно меньше высоты уровня воды в сосуде, $d \ll z$. Обозначим скорость вытекания воды из отверстия $\vec{v}_1$, скорость опускания уровня воды в сосуде $\vec{V}$. Вязкостью воды следует пренебречь, в этом приближении сохраняется механическая энергия воды, то есть тепловых потерь нет.



2.1 Найдите зависимость скорости вытекания воды из отверстия v_1 от высоты уровня воды в сосуде $v_1(z)$.

2.2 Найдите зависимость проекции на ось z скорости опускания V_z от высоты уровня z. В качестве параметров этой функции используйте только ускорение свободного падения g и отношение диаметров η.

2.3 Чему равно ускорение, с которым опускается уровень воды в сосуде, a_z?

2.4 Найдите зависимость высоты уровня воды в сосуде от времени $z(t)$. При $t = 0$ высота уровня воды в сосуде равна h_0. В качестве параметров функции используйте величины g, h_0, η.

2.5 Найдите, через какое время $\tau_{0,5}$ уровень воды в сосуде уменьшится в два раза.

2.6 Рассчитайте численное значение времени «полувытекания» $\tau_{0,5}$, если $h_0 = 20$ см, $\eta = 1/20$, $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Обе части — одна и та же задача. Шарик, брошенный вверх, движется с постоянным ускорением g, а скорость его связана с координатой z (расстоянием от верхней точки) законом сохранения энергии: $v^2 = 2gz$. Вода в дырявом сосуде течёт по тому же закону: скорость струи $v_1 = \sqrt{2gz}$ (энергия вытекшей порции получена от опустившегося уровня), а скорость самого уровня в $1/\eta^2$ раз меньше. Поэтому уровень опускается как шарик, летящий в поле тяжести с ускорением $\eta^4 g$ вместо g. Выписав законы для шарика один раз, во второй части подставляем $g \to \eta^4 g$.

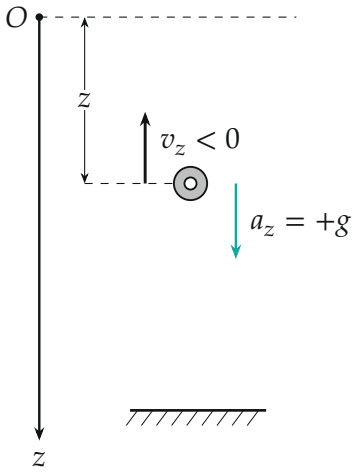
Обозначения. h — высота шарика над точкой бросания, h_0 — максимальная высота; $z = h_0 - h$ — координата в части 1 (вниз от верхней точки); в части 2 z — высота уровня воды над отверстием; S и s_1 — площади сечения сосуда и отверстия.

Часть 1.

Пункт 1.1. Закон сохранения механической энергии для шарика от момента броска до верхней точки (там скорость равна нулю, вся кинетическая энергия перешла в потенциальную):

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Пункт 1.2. Ускорение свободного падения направлено вниз, ось z направлена вниз, поэтому $a_z = +g$. Начальная скорость направлена вверх, против оси: $v_{0z} = -v_0$.



Проекции на ось z, направленную вниз: скорость шарика при подъёме отрицательна, ускорение положительно.

Пункт 1.3. Энергия шарика на высоте $h = h_0 - z$ (закон сохранения энергии, начало отсчёта потенциальной энергии — точка броска):

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_0 = \frac{mv^2}{2} + mg(h_0 - z) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gz.$$

Шарик поднимается, поэтому проекция скорости на ось z отрицательна (до верхней точки):

$$v_z(z) = -\sqrt{2gz}.$$

Пункт 1.4. Движение равноускоренное, скорость $v = v_0 - gt$ (на подъёме направлена вверх, потом меняет знак). Подставляем в $z = v^2/(2g)$, которое следует из пункта 1.3 при $v^2 = 2gz$:

$$z(t) = \frac{(v_0 - gt)^2}{2g}.$$

Проверка начала: при $t = 0$ имеем $z = v_0^2/(2g) = h_0$, то есть шарик внизу, в точке броска — верно.

Пункт 1.5. Выражение $z(t) = \dfrac{g}{2}(t - \tau)^2$, где $\tau = v_0/g$ — время подъёма, — парабола с вершиной в точке $(\tau, 0)$, ветви вверх. Характерные точки: $z(0) = h_0$ (бросок), $z(\tau) = 0$ (верхняя точка, касание оси t), $z(2\tau) = h_0$ (возвращение). Точка $z = h_0/2$ достигается дважды: на подъёме ($t = \tau_{0,5}$) и на спуске ($t = 2\tau - \tau_{0,5}$); значение $\tau_{0,5} = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\tau \approx 0{,}29\,\tau$ получено ниже, в пункте 1.7.

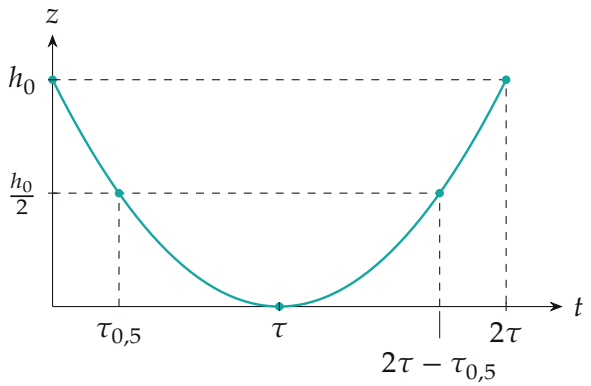


График $z(t)$ шарика: парабола; $\tau = v_0/g$ — время подъёма. В верхней точке ($t = \tau$) кривая касается оси t.

Пункт 1.6. Размерности: $[\tau_{0,5}] = \text{с}$, $[h_0] = \text{м}$, $[g] = \text{м}\cdot\text{с}^{-2}$. Секунды: $1 = -2\beta$, то есть $\beta = -\frac{1}{2}$. Метры: $0 = \alpha + \beta$, то есть $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\tau_{0,5} = C\sqrt{\frac{h_0}{g}}.$$

Пункт 1.7. На высоте, равной половине максимальной, $z = h_0/2$. Подставим $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ и $t = C\sqrt{h_0/g}$ в $z(t)$:

$$\frac{h_0}{2} = \frac{\left(\sqrt{2gh_0} - gC\sqrt{h_0/g}\right)^2}{2g} \;\Rightarrow\; 1 = \left(\sqrt{2} - C\right)^2.$$

Два корня: $C = \sqrt{2} \pm 1$. Физический смысл имеют оба: шарик проходит половину высоты дважды. Время полуподъёма — меньший корень:

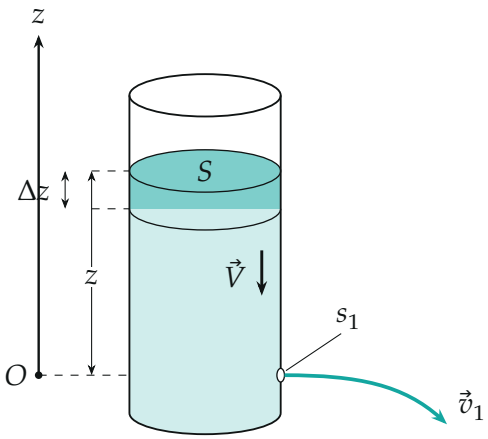
$$C = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41.$$

Обратите внимание. Корень $\sqrt{2} + 1$ — момент прохождения той же высоты на спуске. Проверка: $(\sqrt{2}+1)\sqrt{h_0/g} = 2\tau - \tau_{0,5}$, где $\tau = \sqrt{2h_0/g}$.

Часть 2.

Пункт 2.1. Скорость вытекания. За малое время Δt уровень опустился от z до $z - \Delta z$, а через отверстие вытекла масса Δm воды. Потенциальная энергия воды в сосуде уменьшилась на $\Delta m\, gz$ (всё равно, что порция массой Δm была перенесена с высоты z на уровень отверстия). Эта порция унесла кинетическую энергию $\Delta m\, v_1^2/2$. Кинетической энергией воды, остающейся в сосуде, можно пренебречь: она движется очень медленно ($\eta \ll 1$). По закону сохранения механической энергии

$$\frac{\Delta m\, v_1^2}{2} = \Delta m\, gz \quad\Rightarrow\quad v_1 = \sqrt{2gz}.$$



Слой воды толщиной Δz (тёмный) за время Δt вытекает через отверстие площади s_1 со скоростью v_1; площадь сосуда S.

Пункт 2.2. Скорость опускания уровня. Объём вытекшей воды равен объёму слоя толщиной $V\Delta t$ в сосуде (вода несжимаема, закон сохранения массы):

$$S\,V\Delta t = s_1 v_1 \Delta t \quad \Rightarrow \quad V = \frac{s_1}{S} v_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 v_1 = \eta^2 v_1,$$

так как площади относятся как квадраты диаметров. Подставляем $v_1 = \sqrt{2gz}$; уровень опускается, то есть проекция на ось z, направленную вверх, отрицательна:

$$V_z(z) = -\eta^2\sqrt{2gz} = -\sqrt{2\,\eta^4 g\,z}.$$

Пункт 2.3. Это та же формула, что $v_z(z) = -\sqrt{2gz}$ в пункте 1.3, только вместо g стоит $\eta^4 g$. Начальные условия те же (при $t = 0$ уровень на высоте h_0, он опускается). Поэтому законы движения те же, и ускорение уровня равно

$$a_z = +\eta^4 g.$$

Знак «плюс»: проекция скорости отрицательна, а скорость по модулю убывает, значит ускорение направлено вверх. Подтверждение прямым

вычислением: $a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = -\eta^2\dfrac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{z}}\dot{z} = -\eta^2\dfrac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{z}}\left(-\eta^2\sqrt{2gz}\right) = \eta^4 g.$

Пункт 2.4. Из аналогии с пунктом 1.4: $z(t) = \dfrac{(v_0' - g't)^2}{2g'}$ при $g' = \eta^4 g$ и начальной скорости $v_0' = \sqrt{2g'h_0}$ (это и есть скорость опускания уровня при $z = h_0$):

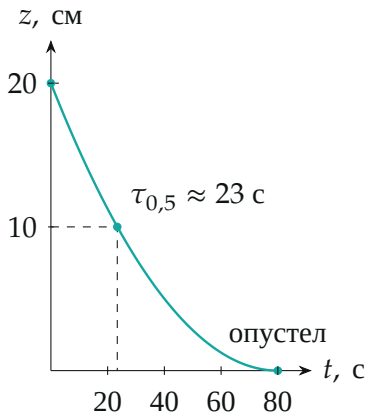
$$z(t) = \frac{\left(\sqrt{2\eta^4 g h_0} - \eta^4 g t\right)^2}{2\eta^4 g} = h_0\left(1 - \eta^2\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\,t\right)^2.$$

Пункт 2.5. Время «полувытекания» — формула (1) с $g \to \eta^4 g$ и $C = \sqrt{2} - 1$:

$$\tau_{0,5} = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{h_0}{\eta^4 g}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\eta^2}\sqrt{\frac{h_0}{g}}.$$

Пункт 2.6. Подставляем $h_0 = 0{,}20$ м, $\eta = \frac{1}{20}$ (то есть $1/\eta^2 = 400$), $g = 10$ м/с^2:

$$\tau_{0,5} = 0{,}414 \cdot 400 \cdot \sqrt{\frac{0{,}20}{10}}\ \text{с} = 0{,}414 \cdot 400 \cdot 0{,}141\ \text{с} \approx 23\ \text{с}.$$



Уровень воды $z(t)$ при $h_0 = 20$ см, $\eta = 1/20$: парабола, как у шарика; половина воды вытекает за 23 с, весь сосуд пустеет за $T = \sqrt{2h_0/(\eta^4 g)} = 80$ с (формула описывает движение лишь до этого момента).

Обратите внимание. В точном решении по уравнению Бернулли $v_1^2 - V^2 = 2gz$, откуда $v_1 = \sqrt{2gz/(1-\eta^4)}$. Поправка имеет порядок $\eta^4/2 = 3 \cdot 10^{-6}$, поэтому условие $\eta \ll 1$ и позволяет считать кинетическую энергию воды в сосуде равной нулю.

Проверка. Размерность: $\sqrt{h_0/g}$ — время; $\eta^4 g$ — ускорение, безразмерный множитель η^4 не меняет размерности. Второй способ для 2.4: из $dz/dt = -\eta^2\sqrt{2gz}$ разделение переменных даёт $\sqrt{z} = \sqrt{h_0} - \eta^2\sqrt{g/2}\,t$, то есть тот же ответ; он обращается в нуль при $T = \sqrt{2h_0/g}/\eta^2 = 80$ с. Половина высоты: $\sqrt{h_0/2} = \sqrt{h_0} - \eta^2\sqrt{g/2}\,\tau_{0,5}$, откуда $\tau_{0,5} = (1 - 1/\sqrt{2})\,T = 0{,}293 \cdot 80 \approx 23$ с — совпало. Смысл: вытекание замедляется, потому что давление и скорость струи падают с высотой уровня.

Ответ. 1.1) $h_0 = \dfrac{v_0^2}{2g}$; 1.2) $a_z = +g$, $v_{0z} = -v_0$; 1.3) $v_z(z) = -\sqrt{2gz}$; 1.4) $z(t) = \dfrac{(v_0 - gt)^2}{2g}$; 1.5) парабола: $z(0) = h_0$, $z(\tau) = 0$ при $\tau = v_0/g$, $z(2\tau) = h_0$; 1.6) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$; 1.7) $C = \sqrt{2} - 1$; 2.1) $v_1 = \sqrt{2gz}$; 2.2) $V_z = -\sqrt{2\eta^4 gz}$; 2.3) $a_z = +\eta^4 g$; 2.4) $z(t) = \dfrac{\left(\sqrt{2\eta^4 g h_0} - \eta^4 g t\right)^2}{2\eta^4 g}$; 2.5) $\tau_{0,5} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\dfrac{h_0}{\eta^4 g}}$; 2.6) $\tau_{0,5} \approx 23$ с.