# Теплокровный сферический кот

**Задача 1.** [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2023/24, 9 класс, задача 3] Живые организмы могут существовать в достаточно узком температурном диапазоне. Нормальная температура человека примерно равна 36,5°; повышение всего на 5° свидетельствует о серьёзном заболевании. В каждом организме действуют сложные механизмы терморегуляции, позволяющие поддерживать температуру тела постоянной. В данном задании предстоит проанализировать некоторые проблемы терморегуляции теплокровных организмов, используя простые модели.



Будем считать, что исследуемое существо имеет форму однородного шара (далее будем называть его сферическим котом). Внутри тела кота постоянно происходит выделение теплоты. Теплопроводность тела высока, поэтому можно считать, что температура во всех его точках одинакова, но может изменяться с течением времени. Во всех задачах этого задания под температурой тела подразумевается установившаяся температура, которую имеет тело кота после установления теплового равновесия.

**Теоретическое введение.**

1. Мощность теплоты, выделяющейся внутри сферического кота, постоянна (не зависит от температуры тела) и пропорциональна его объёму:

$$W = wV, \qquad (1)$$

где $w$ — некоторая постоянная величина (тепловыделение), одинаковая для всех котов независимо от их размеров, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объём шара, $R$ — радиус шара. Тепловыделение $w$ живых существ может зависеть от температуры.

2. Мощность теплоты, уходящей в окружающую среду с любой поверхности, пропорциональна разности температур поверхности $t_x$ и окружающей среды $t_0$ и площади поверхности $S$:

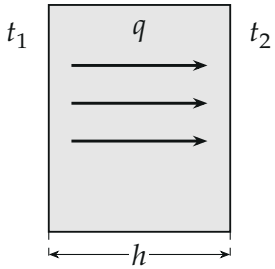
$$q = \beta S\,(t_x - t_0)\,, \qquad (2)$$

где $\beta$ — известная постоянная величина (коэффициент теплоотдачи, зависит от свойств окружающей среды, то есть воздуха). Площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2$.

3. Согласно закону Фурье мощность потока теплоты $q$ через пластинку площади $S$ пропорциональна разности температур на её сторонах:

$$q = \gamma \frac{t_1 - t_2}{h} S, \qquad (3)$$

здесь $\gamma$ — постоянный коэффициент теплопроводности материала пластинки, $h$ — толщина пластинки.




4. Как предстоит показать в дальнейшем, мощность потока теплоты, уходящей в окружающую среду (даже при наличии одежды), пропорциональна разности температур тела и окружающей среды:

$$q = \alpha\,(t - t_0)\,. \qquad (4)$$

Коэффициент пропорциональности $\alpha$ называется коэффициентом теплопередачи. Для голого кота $\alpha = \beta S$.

**Часть 1. Спящие коты.** В этой части мощность тепловыделения $w$ постоянна, то есть не зависит от температуры и одинакова для котов любых размеров. Температура окружающей среды равна $t_0 = 20°\text{C}$, установившаяся температура тела голого кота радиуса $R_0$ равна $t_1 = 36°\text{C}$.

Почему маленькие дети больше мерзнут?

1.1 Рассчитайте, чему будет равна установившаяся температура голого котёнка $t_2$, радиус которого в два раза меньше, чем $R_0$.

Почему «греет» шуба? Благодаря одежде, надетой на котёнка, коэффициент теплопередачи уменьшился в 2 раза.

1.2.1 Рассчитайте, чему будет равна установившаяся температура $t_3$ одетого котёнка.

Покажите, что одежда действительно может изменить коэффициент теплопередачи. Обозначим коэффициент теплопередачи голого кота $\alpha_0$. Будем считать, что одежда — тонкий слой теплоизоляционного материала с коэффициентом теплопроводности $\gamma$ и толщиной $h$ ($h \ll R$). Тепловой контакт между телом кота и нижней поверхностью одежды хороший, их температуры равны. Температура верхнего слоя одежды отличается от температуры воздуха.

1.2.2 Покажите, что коэффициент теплопередачи одетого кота тоже можно описать формулой $q = \alpha(t - t_0)$, но с другим коэффициентом пропорциональности $\alpha_1$, отличным от $\alpha_0$. Выразите $\alpha_1$ через $\alpha_0$, $h$, $\gamma$.

**Часть 2. «Живая» модель.** Проанализируем жизнь кота в рамках более реальной модели. Размер кота остаётся неизменным. Мощность тепловыделения зависит от температуры: максимальна при некоторой оптимальной температуре $t_{opt}$ и монотонно убывает при отклонении от неё. Жизнь кота возможна, если его температура лежит между $t_{\min} = 30°$ и $t_{\max} = 50°$; выйдет из диапазона — кот умирает. В этом диапазоне

$$W(t) = A\,(t - t_{\min})\,(t_{\max} - t)\,, \qquad (5)$$

где $A$ — постоянная; вне диапазона $W = 0$. При температуре воздуха $t_0^* = 20°$ температура голого кота оптимальна. В пунктах 2.1–2.5 кот

голый, коэффициент теплоотдачи $\alpha_0$ постоянен.

2.1 Найдите оптимальную температуру кота $t_{opt}$.

Предложите такую нормировку мощностей тепловыделения $\overline{W} = W/C$ и теплоотдачи $\overline{q} = q/C$, чтобы значения $\overline{W}(t)$, $\overline{q}(t)$ можно было рассчитать численно.

2.2 Укажите, что следует взять в качестве нормировочной постоянной $C$ и её физический смысл. Запишите формулы для $\overline{W}(t)$, $\overline{q}(t)$. Укажите численные значения параметров этих функций.

2.3 Постройте точный график $\overline{W}(t)$ и график $\overline{q}(t)$ при $t_0^* = 20°$.

В пунктах 2.4–2.6 приведите графическую иллюстрацию решения: графики $\overline{W}(t)$, $\overline{q}(t)$ при указанных параметрах. Допускается численное решение уравнений.

2.4 Рассчитайте установившуюся температуру голого кота, если температура воздуха а) $t_0 = 35°$; б) $t_0 = 25°$.

2.5 Рассчитайте, в каком диапазоне температур воздуха ($t_{0\,\min} \ldots t_{0\,\max}$) может жить голый кот.

Чтобы не замерзнуть, кот начинает одеваться, изменяя коэффициент теплоотдачи $\alpha$.

2.6 Предложите такую зависимость $\alpha(t_0)$ при $t_0 < 20°$, чтобы температура кота оставалась оптимальной независимо от температуры воздуха.

2.7 Постройте график зависимости $\alpha(t_0)/\alpha_0$ при $0° < t_0 < 20°$.

2.8 Оцените, во сколько раз надо изменить коэффициент теплопередачи, чтобы кот смог выжить при температуре воздуха $t_0 = 0°$.

▲ **Решение. Что происходит.** Температура кота установится, когда мощность выделяющейся теплоты сравняется с мощностью теплоты, уходящей наружу: пока тепла вырабатывается больше, чем уходит, кот нагревается, и наоборот. Всё решение — уравнение теплового баланса $W = q$. В части 1 оно линейно по температуре, и два кота (или кот в одежде и без) сравниваются отношением. В части 2 выделение зависит от температуры и баланс — квадратное уравнение, корни которого разбираются графически: это точки пересечения параболы тепловыделения с прямой теплоотдачи.

**Обозначения.** $t$ — температура кота, $t_0$ — воздуха, $t_x$ — наружной

поверхности одежды; $W$ — мощность тепловыделения, $q$ — мощность теплоотдачи.

**Часть 1.**

**Пункт 1.1.** Закон сохранения энергии при установившейся температуре: вся выделяемая теплота уходит через поверхность, $W = q$. Подставляем (1) и (2):

$$w\frac{4}{3}\pi R^3 = \beta \cdot 4\pi R^2 (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \frac{wR}{3\beta}.$$

Перегрев над воздухом пропорционален радиусу: тепловыделение растёт как объём, $R^3$, а теплоотдача — как площадь, $R^2$, поэтому у маленького тела теплоты на единицу поверхности вырабатывается меньше. Для кота и котёнка при одинаковых $w$ и $\beta$:

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{R_0/2}{R_0} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_0 + \frac{t_1 - t_0}{2} = 20^\circ + 8^\circ = 28^\circ.$$

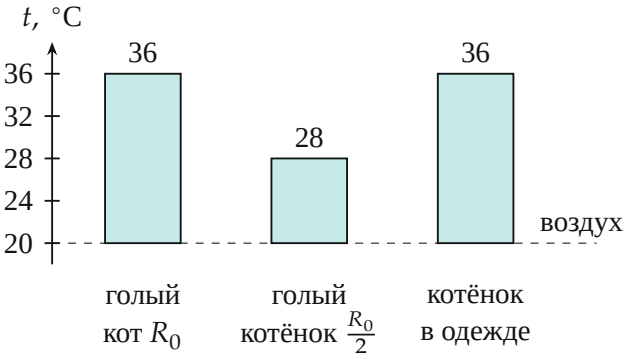
**Пункт 1.2.1.** Теперь у котёнка радиус $R_0/2$, а коэффициент теплоотдачи $\beta$ в два раза меньше (так как коэффициент теплопередачи $\alpha = \beta S$ уменьшился в два раза при той же площади). Баланс:

$$t_3 - t_0 = \frac{w\,(R_0/2)}{3\,(\beta/2)} = \frac{wR_0}{3\beta} = t_1 - t_0,$$

то есть

$$t_3 = t_1 = 36^\circ.$$

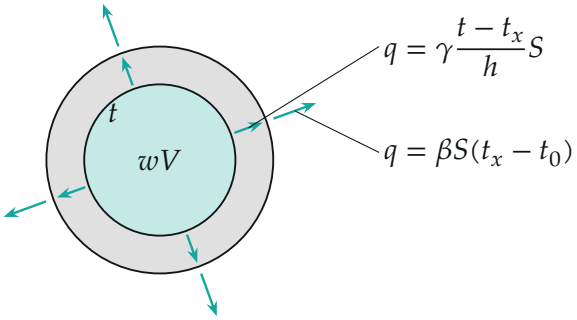
Одежда вдвое меньшей теплоотдачи возвращает котёнку температуру взрослого кота.




*Установившиеся температуры: столбик отсчитывается от температуры воздуха* 20°. *Котёнок мёрзнет сильнее; одежда с вдвое меньшим* $\alpha$ *возвращает ему температуру взрослого кота.*

**Пункт 1.2.2.** В установившемся режиме через слой одежды идёт тот же поток, что выделяется в коте и затем уходит в воздух с наружной поверхности одежды. Закон Фурье (3) для слоя толщиной $h$ (тонкий, $h \ll R$, площадь сечения считаем равной $S$) и закон (2) для внешней поверхности:

$$W = \gamma \frac{t - t_x}{h} S = \beta S\,(t_x - t_0).$$




*Кот (бирюзовый) с одеждой (серый слой толщиной* $h$*). Тепло* $wV$ *сначала проходит слой одежды, потом уходит с наружной поверхности в воздух.*

Из равенства двух потоков выражаем температуру наружной поверхности одежды; обозначим $a = \dfrac{\gamma}{h\beta}$:

$$\gamma\frac{t - t_x}{h} = \beta(t_x - t_0) \quad \Rightarrow \quad a\,(t - t_x) = t_x - t_0 \quad \Rightarrow \quad t_x = \frac{a\,t + t_0}{a + 1}.$$

Поток в воздух:

$$q = \beta S\left(\frac{a\,t + t_0}{a + 1} - t_0\right) = \beta S\,\frac{a}{a + 1}\,(t - t_0).$$

Поток пропорционален разности температур тела и воздуха, формула (4) верна, и

$$\alpha_1 = \beta S\,\frac{a}{a + 1} = \alpha_0\,\frac{\gamma}{\gamma + h\beta}.$$

(Эквивалентная запись: $\dfrac{1}{\alpha_1} = \dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{h}{\gamma S}$ — как у последовательных резисторов, тепловые сопротивления складываются.)

**Проверка.** Размерность: $\gamma/h$ и $\beta$ имеют одинаковую размерность (Вт/(м$^2$·К)), так что отношение $\gamma/(\gamma + h\beta)$ безразмерно. Пределы: при $h \to 0$ или $\gamma \to \infty$ имеем $\alpha_1 \to \alpha_0$ (одежды нет); при малой теплопроводности $\alpha_1 \approx \gamma S/h \ll \alpha_0$ — теплоотдача определяется одеждой, чем толще слой, тем меньше $\alpha_1$ и тем теплее коту, согласно пункту 1.1.

**Часть 2.**

**Пункт 2.1.** Функция $W(t) = A(t - t_{\min})(t_{\max} - t)$ — парабола с ветвями вниз и нулями $t_{\min}$ и $t_{\max}$; максимум — в середине между корнями:

$$t_{opt} = \frac{t_{\min} + t_{\max}}{2} = 40^\circ.$$

**Пункт 2.2.** Уравнение баланса $W = q$:

$$A\,(t - t_{\min})(t_{\max} - t) = \alpha_0(t - t_0).$$

Две неизвестные константы $A$ и $\alpha_0$ входят только в отношение. Делим на $\alpha_0$: нормировочная постоянная $C = \alpha_0$. Её смысл: мощность теплоты,

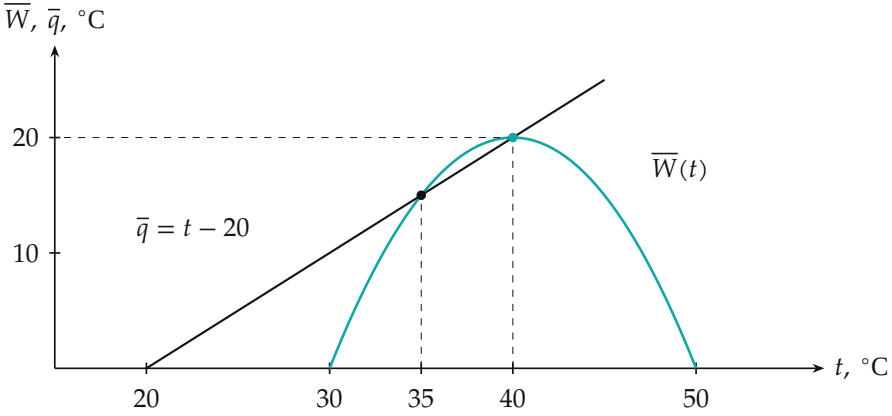
уходящей в воздух при разности температур 1°. После нормировки обе мощности измеряются в градусах:

$$\overline{W}(t) = \overline{A}\,(t-30)(50-t), \qquad \overline{q}(t) = t - t_0, \qquad \overline{A} = \frac{A}{\alpha_0}.$$

Параметр $\overline{A}$ находим из условия: при $t_0^* = 20°$ равновесная температура оптимальна, $t = 40°$:

$$\overline{A}\,(40-30)(50-40) = 40-20 \quad \Rightarrow \quad \overline{A} = \frac{20}{100} = 0{,}20\,\frac{1}{°\text{C}}.$$

**Пункт 2.3.** $\overline{q}(t) = t - 20$ — прямая с единичным наклоном, пересекающая ось температур в точке $t_0 = 20°$. $\overline{W}(t)$ — парабола с корнями 30° и 50° и вершиной $\overline{W}(40) = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 10 = 20°$. Прямая проходит через вершину: при $t = 40°$ $\overline{q} = 20°$.




*Тепловыделение $\overline{W}(t)$ (парабола) и теплоотдача $\overline{q}(t)$ при $t_0 = 20°$. Точки пересечения: 40° (устойчивая, оптимальная) и 35° (неустойчивая).*

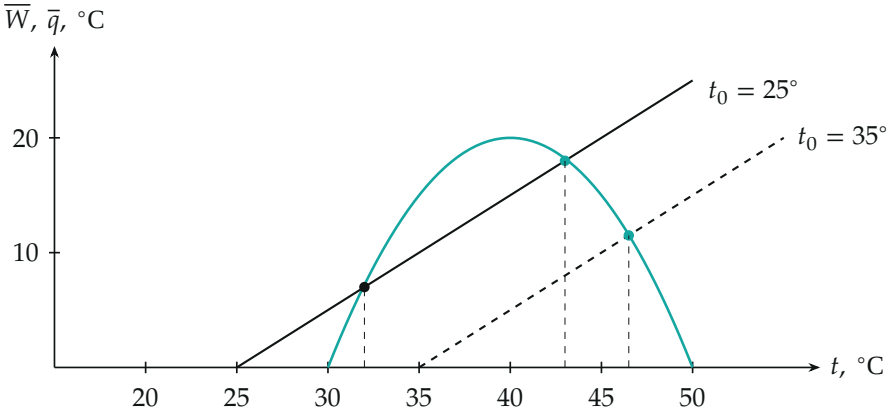
Вторая точка пересечения $t = 35°$: $\overline{W}(35) = 0{,}2 \cdot 5 \cdot 15 = 15° = 35-20$. Она неустойчива (объяснено в пункте 2.4).

**Пункт 2.4.** Подставляем в баланс $0{,}2(t-30)(50-t) = t - t_0$ и приводим к квадратному уравнению ($-t^2 + 80t - 1500 = 5t - 5t_0$):

$$t^2 - 75t + (1500 - 5t_0) = 0.$$

При $t_0 = 35°$: $D = 75^2 - 4 \cdot 1325 = 325$, корни $t = \dfrac{75 \pm 18{,}0}{2}$, то есть 28,5° и 46,5°. Корень 28,5° вне диапазона жизни ($W = 0$ при $t < 30°$), в нём баланса на самом деле нет. При $t_0 = 25°$: $D = 75^2 - 4 \cdot 1375 = 125$, корни 32° и 43°.

**Какой корень реализуется.** Равновесие устойчиво, если при небольшом нагреве теплоотдача превысит тепловыделение (кот остынет обратно), а при небольшом охлаждении будет наоборот. На правой ветви параболы, правее точки пересечения, прямая $\overline{q}$ идёт выше параболы $\overline{W}$: кот выше этой температуры охлаждается, ниже — нагревается. Это больший корень. Меньший корень неустойчив: чуть выше него $\overline{W} > \overline{q}$, и температура уходит вверх до большего корня; чуть ниже — вниз, и кот погибает.




*Сплошная прямая — $t_0 = 25°$, штриховая — $t_0 = 35°$. Точки пересечения с параболой: при $t_0 = 25°$ — 32° (неустойчивая) и 43° (устойчивая); при $t_0 = 35°$ — устойчивая 46,5° (левый корень 28,5° вне диапазона).*

Итак: а) $t_0 = 35°$: $t = 46{,}5°$; б) $t_0 = 25°$: $t = 43°$. В обоих случаях температура попадает в диапазон жизни (30°–50°).

**Пункт 2.5.** Кот живёт при температуре воздуха $t_0$, если прямая $\overline{q} = t - t_0$ пересекает параболу в точке с $t \le 50°$ при устойчивом равновесии.

Верхняя граница: чем жарче в воздухе, тем правее прямая. При $t_0 = 50°$ прямая выходит из точки $(50, 0)$ — правого корня параболы; равновесие $t = 50°$ (уравнение $t^2 - 75t + 1250 = 0$ даёт 25° и 50°), кот на

пределе. Дальше температура кота выходит за 50°. Итак,

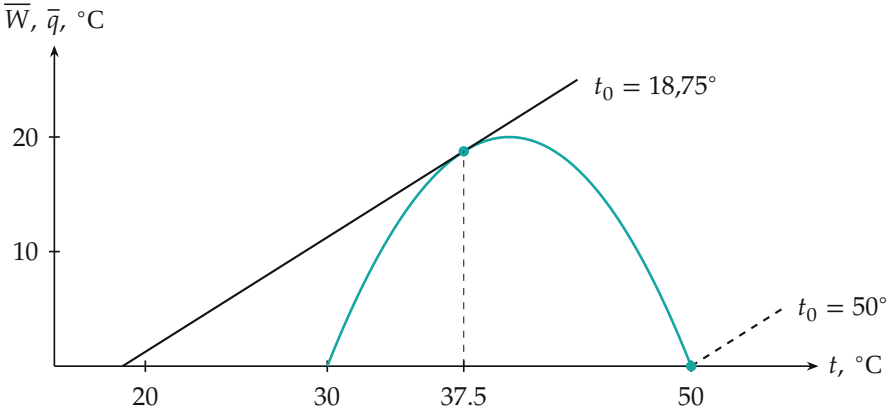
$$t_{0\,\max} = t_{\max} = 50°.$$

Нижняя граница: чем холоднее в воздухе, тем левее прямая и тем выше она идёт над осью температур. Пока прямая пересекает параболу, равновесие есть. В предельном случае прямая касается параболы: уравнение баланса имеет двойной корень, то есть нулевой дискриминант. При ещё более низкой $t_0$ пересечений нет: тепловыделение не покрывает потерь, кот остывает и погибает. Условие касания:

$$D = \left(\frac{75}{2}\right)^2 - (1500 - 5t_0) = 0,$$

$$t_{0\,\min} = \frac{1500 - 1406{,}25}{5} = 18{,}75° \approx 19°.$$

Касание происходит при $t = 75/2 = 37{,}5°$ — это двойной корень уравнения $t^2 - 75t + 1406{,}25 = 0$.



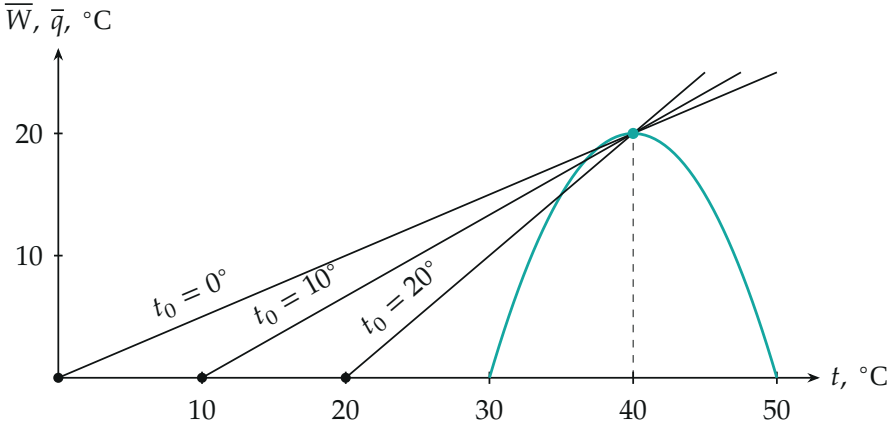

*Две «крайние» прямые: $t_0 = 18{,}75°$ касается параболы (в точке $37{,}5°$), $t_0 = 50°$ проходит через правый корень параболы $50°$.*

**Пункт 2.6.** Кот одевается, и $\alpha$ меняется. Баланс в нормированном виде: $\overline{A}(t - 30)(50 - t) = \dfrac{\alpha}{\alpha_0}(t - t_0)$. Чтобы кот при любой $t_0$ имел оп-

тимальную температуру $t_{opt} = 40°$, прямая теплоотдачи должна проходить через вершину параболы, $\overline{W}_{\max} = 20°$:

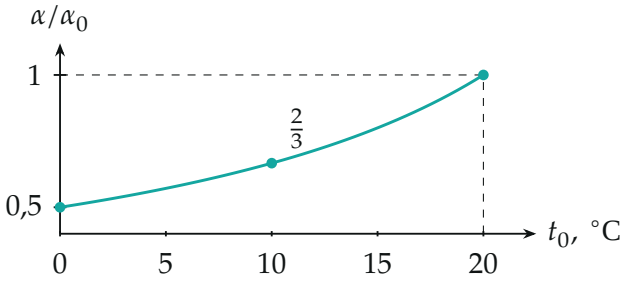
$$\frac{\alpha}{\alpha_0}(40 - t_0) = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha(t_0)}{\alpha_0} = \frac{20}{40 - t_0}.$$

Изменение $\alpha$ меняет только наклон прямой, а точка пересечения с осью температур остаётся $t_0$; все прямые идут из точек $t_0$ в одну точку — вершину.




*Прямые теплоотдачи для $t_0 = 0°, 10°, 20°$ с разными наклонами $\alpha/\alpha_0 = 0{,}5;\ 0{,}67;\ 1$ — все проходят через вершину параболы $(40°, 20°)$.*

**Пункт 2.7.** График $\alpha(t_0)/\alpha_0 = \dfrac{20}{40 - t_0}$ на отрезке $0° < t_0 < 20°$ — плавно возрастающая дуга от 0,5 (при 0°) до 1 (при 20°). Чем холоднее воздух, тем сильнее нужна изоляция.



*Нужный коэффициент теплопередачи по сравнению с коэффициентом голого кота. При $t_0 = 20°$ одежда не нужна, при $0°$ нужно уменьшить $\alpha$ вдвое.*

**Пункт 2.8.** При $t_0 = 0°$ по формуле предыдущего пункта $\alpha/\alpha_0 = \dfrac{20}{40} = 0{,}5$, то есть коэффициент теплопередачи надо уменьшить в 2 раза — при таком значении кот даже поддерживает оптимальную температуру.

Строго достаточно, чтобы прямая $\overline{q} = k\,t$ (при $t_0 = 0$, $k = \alpha/\alpha_0$) пересекала параболу. Максимум $\overline{W}/t = 0{,}2\,(80 - t - 1500/t)$ достигается при $t = \sqrt{1500} \approx 38{,}7°$ и равен $0{,}2\left(80 - 2\sqrt{1500}\right) \approx 0{,}508$. Значит, $k \le 0{,}508$: уменьшить $\alpha$ надо не менее чем в $1/0{,}508 \approx 1{,}97 \approx 2$ раза. Оценка по вершине (0,5) отличается от строгой на 2%.

**Обратите внимание.** Холоднее $18{,}75°$ голый кот погибает потому, что при остывании его тепловыделение само падает: чем ниже температура, тем меньше он греет себя, и остывание ускоряется.

**Проверка.** Размерность: $\overline{W}$ и $\overline{q}$ измеряются в градусах, $\overline{A}$ — в $1/°\mathrm{C}$. Предельный случай $\alpha = \alpha_0$, $t_0 = 20°$: $0{,}2\cdot10\cdot10 = 20 = 40-20$ — верно. Второй способ для 2.4: подстановка найденных температур в исходное уравнение: $t = 46{,}5$, $t_0 = 35$: $0{,}2 \cdot 16{,}5 \cdot 3{,}5 = 11{,}55 \approx 11{,}5 = 46{,}5 - 35$; $t = 43$, $t_0 = 25$: $0{,}2 \cdot 13 \cdot 7 = 18{,}2 \approx 18$ (разница от округления корня 43,09).

**Ответ.** 1.1) $t_2 = 28°$; 1.2.1) $t_3 = 36°$; 1.2.2) $\alpha_1 = \alpha_0 \dfrac{\gamma}{\gamma + h\beta}$; 2.1) $t_{opt} = 40°$; 2.2) $C = \alpha_0$, $\overline{W} = \overline{A}(t - 30)(50 - t)$, $\overline{q} = t - t_0$, $\overline{A} = 0{,}20\ °\mathrm{C}^{-1}$; 2.3) графики на рисунке; 2.4) а) $46{,}5°$; б) $43°$; 2.5) $t_{0\,\min} \approx 18{,}75° \approx 19°$, $t_{0\,\max} = 50°$; 2.6) $\dfrac{\alpha}{\alpha_0} = \dfrac{20}{40 - t_0}$; 2.7) график на рисунке; 2.8) $\alpha$ надо уменьшить примерно в 2 раза (строго — не менее чем в 1,97 раза).