

Магнитная вязкость

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 10 класс, экспериментальный тур, задача

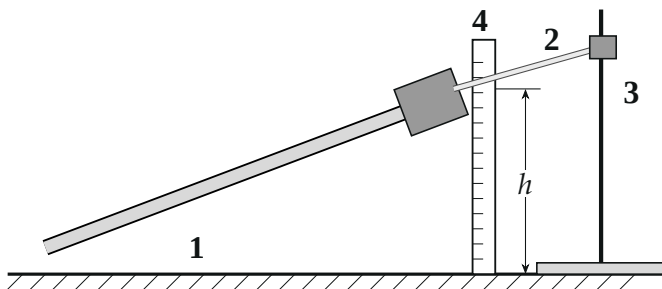
1] **Магнитная вязкость.** При движении намагниченного шарика внутри металлической трубки (в этом эксперименте — алюминиевой) в стенках трубки возникают токи намагничивания, которые называются токами Фуко. Из-за наличия этих токов появляется сила торможения, действующая на шарик, которая пропорциональна скорости V движения шарика:

$$\vec{F} = -\beta \vec{V} \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности β в данной формуле зависит от параметров трубки (её материала и геометрических размеров) и структуры магнитного поля, создаваемого шариком. Часто явление возникновения тормозящей силы называют магнитной вязкостью. В данной задаче Вам необходимо экспериментально исследовать это явление.

Оборудование. Алюминиевая трубка длиной $L = 50,0$ см; набор из одинаковых 5 неодимовых шариков-магнитов; кусочек пластиковой трубки, деревянная линейка, линейка измерительная, штатив, секундомер с памятью этапов, пластиковый стакан.

Установка для проведения измерений очевидна.



К трубке 1 прикреплена деревянная линейка 2, конец которой закреплён в лапке штатива 3. С помощью измерительной линейки 4 можно измерять высоту верхнего края линейки над уровнем стола h . Второй конец трубки опирается на поверхность стола. Время движения магнитов внутри трубки измеряется с помощью секундомера.

Примечания.

1. Во всех случаях движение шариков внутри трубки считайте равномерным.
2. Все длины измеряйте в сантиметрах.
3. Диапазоны измерения высоты h в каждой части задания выбирайте самостоятельно.
4. Для получения приемлемой точности измерений всегда проводите измерения времён движения несколько раз.
5. Оценка погрешности измерений необходима только в тех пунктах задания, где эта оценка требуется.
6. Для вашего удобства подготовлены листы ответов, в которых имеются таблицы для записи результатов измерений и бланки для построения графиков. Оцифровку осей проводите самостоятельно. Заполнять все ячейки не обязательно, самостоятельно определяйте число необходимых измерений.
7. Если требуется использовать некоторые формулы, то их вывод приведите на рабочих листах, в листы ответов занесите только итоговую формулу.
8. Формулы для обработки графиков приведите только один раз (при первом их использовании).

Часть 1. Скатывание. В данной части Вам необходимо изучить скатывание одного шарика внутри трубки. *Чтобы не искать шарики по всему кабинету, под нижний конец трубки положите горизонтально пластиковый стакан, в который должен попадать шарик.*

1.1 Приведите формулу, с помощью которой по известной длине трубки и времени скатывания можно рассчитать скорость движения шарика.

1.2 Измерьте зависимость скорости скатывания шарика V от высоты верхнего края линейки h . Постройте график полученной зависимости.

1.3 Для одного из значений (по вашему выбору) высоты h рассчитайте погрешность измерения скорости движения шарика.

1.4 Укажите, можно ли считать, что формула (1) применима в данном случае. Укажите, можно ли пренебречь силой трения в данном эксперименте. Ответы кратко обоснуйте.

1.5 Используя полученные результаты, определите отношение модуля силы вязкости F_0 при скорости движения $V_0 = 1,0$ см/с к силе тяжести одного шарика $F_0/(mg)$ с максимальной точностью. Приведите формулу, по которой Вы провели расчёт этой величины.

Часть 2. Соскальзывание двух шариков в трубке. Поместите два шарика в пластиковую трубочку. Проведите исследование движения трубочки с шариками внутри алюминиевой трубки.

2.1 Измерьте зависимость скорости движения трубочки V от высоты подъёма алюминиевой трубки h . Представьте полученную зависимость в линеаризованном виде

$$Y = aX + b, \quad (2)$$

где Y , X — некоторые функции от результатов измерений h , t . Постарайтесь придумать такую линеаризацию, чтобы по параметрам этой зависимости можно было определить коэффициент трения пластиковой трубочки о стенку алюминиевой трубки.

2.2 Запишите формулы для расчётов переменных Y , X , проведите их расчёт, постройте график линеаризованной зависимости.

2.3 Определите по графику значение коэффициента трения μ .

2.4 Проведите максимально точный расчёт коэффициента трения μ . Оцените погрешность найденного значения.

Часть 3. Зависимость магнитной силы от числа магнитов. Установите трубку так, чтобы её верхний край находился на высоте примерно 30 см. Вам необходимо исследовать зависимость силы магнитной вязкости от числа шариков. Нужное число шариков вставляйте в пластиковую трубку.

3.1 Измерьте зависимость скорости движения трубочки с шариками V от числа шариков n в ней. Постройте график полученной зависимости.

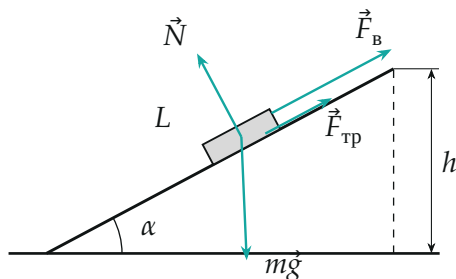
Предположим, что сила магнитной вязкости от числа шариков имеет степенной вид

$$F = \beta_1 n^\gamma V \quad (3)$$

3.2 Используя полученные экспериментальные данные, определите показатель степени γ в формуле (3). Хотя бы попытайтесь его угадать.

▲ Решение. Что происходит. Магнит, движущийся в алюминиевой трубке, наводит в стенках вихревые токи, и эти токи тормозят его силой, пропорциональной скорости. Сила тяжести вдоль трубки постоянна, сила торможения растёт со скоростью, поэтому очень быстро наступает равновесие — шарик едет с постоянной скоростью, как и сказано в примечании. Измеряя эту скорость при разных наклонах, мы сравниваем «вдоль-трубочную» часть силы тяжести с силой вязкости и находим β и коэффициент трения.

Обозначения. $L = 50,0$ см — длина трубки; α — её угол с горизонтом, $\sin \alpha = h/L$; t — время движения по трубке; V — скорость; m — масса одного шарика; β — коэффициент вязкости (1). Ниже приведён *пример измерений и обработки*: числа взяты из решения организаторов, у вас они будут другими, но метод тот же.



Трубка длиной L под углом α ($\sin \alpha = h/L$); силы на движущееся вниз тело: тяжести, реакции $\vec{N}$, вязкости $\vec{F}_v$ и (в частях 2–3) трения $\vec{F}_{тр}$.

Часть 1. Скатывание.

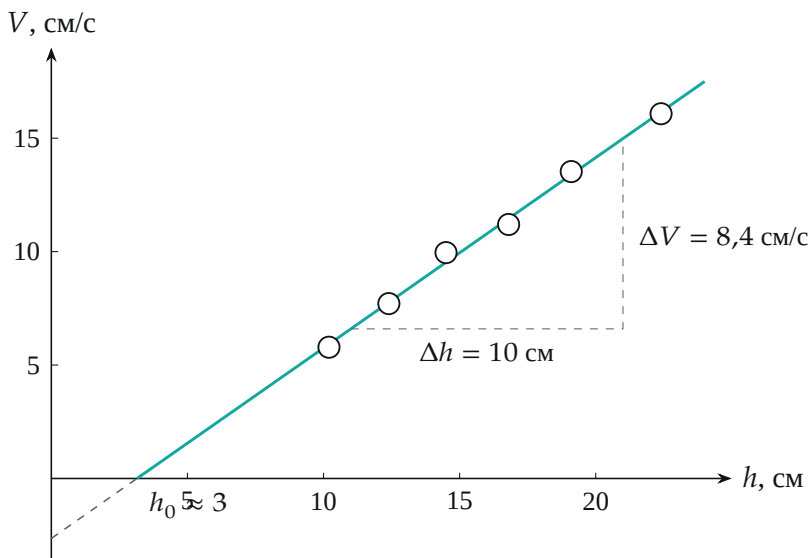
1.1. Движение равномерное, шарик проходит всю трубку длиной L за время t :

$$V = \frac{L}{t}. \quad (4)$$

1.2. Опыт и график. Порядок такой: устанавливаем нужную высоту h (линейкой 4 измеряем высоту верхнего края деревянной линейки над столом), опускаем шарик в верхний конец и секундомером измеряем время выхода из нижнего (под ним — стакан). На каждой высоте —

5 измерений, берём среднее $\bar{t}$ и считаем $V = L/\bar{t}$. Высоты берём примерно от 10 до 22 см: ниже шарик может остановиться из-за трения, выше он едет слишком быстро для точного замера времени.

h , см	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$, с	V , см/с
10,2	8,63	8,70	8,65	8,61	8,62	8,642	5,79
12,4	6,45	6,60	6,47	6,46	6,45	6,486	7,71
14,5	4,97	5,04	5,09	4,92	5,09	5,022	9,96
16,8	4,38	4,64	4,51	4,32	4,48	4,466	11,20
19,1	3,64	3,69	3,77	3,66	3,72	3,696	13,53
22,4	3,08	3,11	3,10	3,12	3,14	3,110	16,08



$V(h)$: точки — опыт, прямая — метод наименьших квадратов (МНК), $V = Kh + V_c$, $K = 0,84 \text{ с}^{-1}$, $V_c = -2,6 \text{ см/с}$.

1.3. Погрешность скорости (для $h = 12,4 \text{ см}$). Время — прямое измерение. Оценка по серии из $N = 5$ измерений (с коэффициентом 2, примерно доверительная вероятность 95 %):

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{\sum_k (t_k - \langle t \rangle)^2}{N(N-1)}} = 0,057 \text{ с}, \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta t}{\bar{t}} = \frac{0,057}{6,486} = 0,9 \text{ \%}.$$

Длина трубки измерена с точностью 0,1 мм: $\varepsilon_L = 0,02\%$, это много меньше ε_t и не учитывается. Так как $V = L/t$, относительная погрешность скорости та же, и

$$\Delta V = \varepsilon_t V = 0,009 \cdot 7,71 \approx 0,07 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

1.4. Применима ли формула (1) и можно ли пренебречь трением.

Шарик движется равномерно, значит, силы вдоль трубки уравновешены. Если действует только сила вязкости (1), то из второго закона Ньютона в проекции на трубку

$$\beta V = mg \sin \alpha = mg \frac{h}{L}. \quad (5)$$

То есть V должна быть прямо пропорциональна h . На графике точки действительно ложатся на прямую — формула (1) применима. Но прямая не проходит через начало координат: при $h \approx 3$ см скорость обращается в нуль, при меньших h шарик вообще не движется. Это сила трения (качения, о стенки трубки): с ней $\beta V = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$. Сдвиг $V_c = -2,6$ см/с — это 20–45 % от измеренных скоростей, поэтому *пренебречь трением нельзя*.

1.5. Отношение $F_0/(mg)$. Из (5) наклон графика равен $K = \frac{mg}{\beta L}$ (постоянная сила трения сдвигает прямую, но не меняет наклон, поэтому берём именно наклон). Тогда

$$\beta = \frac{mg}{KL} \Rightarrow \frac{F_0}{mg} = \frac{\beta V_0}{mg} = \frac{V_0}{KL} = \frac{1,0}{0,84 \cdot 50} \approx 2,4 \cdot 10^{-2}.$$

Наклон $K = 0,84 \pm 0,05 \text{ с}^{-1}$ получен по МНК (погрешность с коэффициентом 2 как в 1.3), так что $F_0/(mg) = (2,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$. Это значит, что при скорости 1 см/с сила вязкости составляет всего 2 % от веса шарика.

Часть 2. Соскальзывание двух шариков.

2.1–2.2. Линеаризация. Теперь трубочка с шариками соскальзывает с трением о алюминиевую трубку. Эксперимент — как в части 1, высоты берём побольше (25–45 см), потому что трение удерживает трубочку

на малых наклонах. Равномерное движение (второй закон Ньютона в проекции на трубку; $N = mg \cos \alpha$ — по нормали к трубке):

$$\beta V = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad \text{или} \quad \frac{V}{\cos \alpha} = \frac{mg}{\beta} (\operatorname{tg} \alpha - \mu). \quad (6)$$

Здесь m — масса трубочки с шариками, β — вязкость для этих двух шариков. Обратите внимание: углы большие ($\sin \alpha$ до 0,9), поэтому $\cos \alpha \neq 1$ и малыми углами пользоваться нельзя. Из (6) видна линеаризация (2):

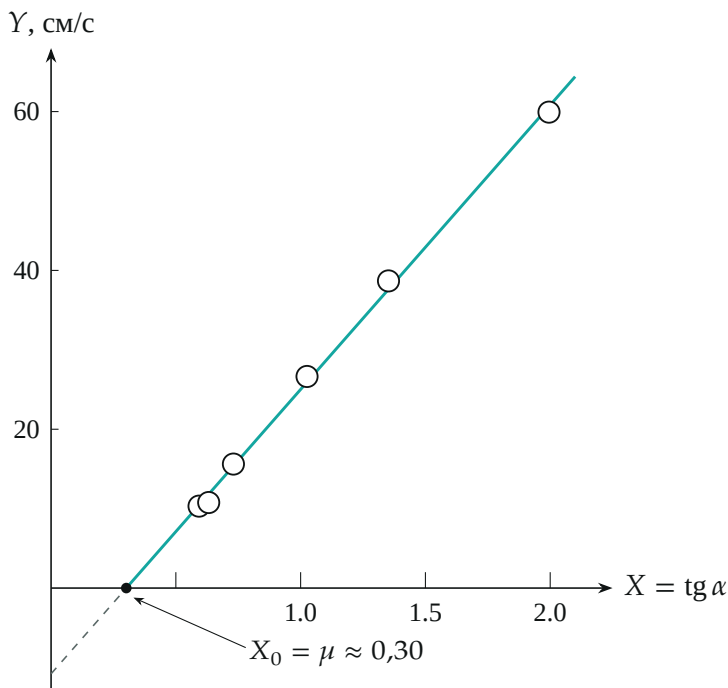
$$Y = \frac{V}{\cos \alpha}, \quad X = \operatorname{tg} \alpha, \quad a = \frac{mg}{\beta}, \quad b = -a\mu.$$

Тригонометрические функции считаем по измеренной высоте:

$$\sin \alpha = \frac{h}{L}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

h , см	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$, с	V , см/с
25,5	5,60	5,78	5,44	5,61	5,74	5,634	8,87
26,7	5,41	5,61	5,48	5,41	5,54	5,490	9,11
29,5	4,02	3,86	3,91	4,05	3,99	3,966	12,61
35,8	2,79	2,58	2,60	2,78	2,69	2,688	18,60
40,2	2,19	2,13	2,29	2,19	2,07	2,174	23,00
44,7	1,84	1,90	1,87	1,84	1,86	1,862	26,85

h , см	V , см/с	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$X = \operatorname{tg} \alpha$	$Y = V / \cos \alpha$, см/с
25,5	8,87	0,510	0,860	0,593	10,3
26,7	9,11	0,534	0,845	0,632	10,8
29,5	12,61	0,590	0,807	0,731	15,6
35,8	18,60	0,716	0,698	1,026	26,6
40,2	23,00	0,804	0,595	1,352	38,7
44,7	26,85	0,894	0,448	1,995	59,9



$Y(X)$ в линеаризованном виде: прямая пересекает ось X в точке μ .

2.3. Значение μ по графику. Из (6) $Y = 0$ при $X = \mu$: коэффициент трения — координата пересечения прямой с осью X , $\mu \approx 0,30$.

2.4. Точный расчёт и погрешность. Коэффициенты прямой находим по МНК:

$$a = (35,8 \pm 1,5) \frac{\text{см}}{\text{с}}, \quad b = -(10,8 \pm 1,7) \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Тогда $\mu = -b/a = 0,30$, а относительные погрешности складываются как независимые:

$$\Delta\mu = \mu \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2} = 0,30 \sqrt{0,042^2 + 0,157^2} \approx 0,05,$$

$$\mu = 0,30 \pm 0,05 \quad (\varepsilon \approx 16\%).$$

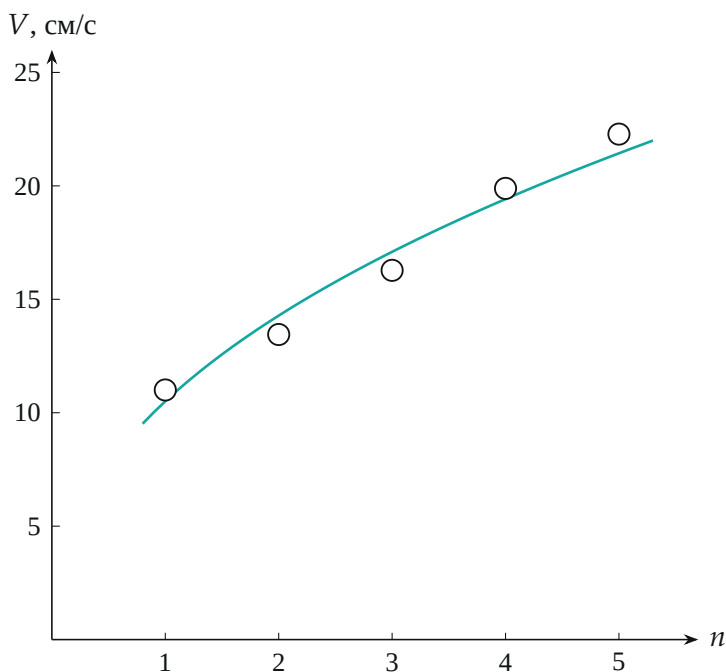
Основной вклад даёт b : пересечение с осью X определено хуже, чем

наклон.

Часть 3. Зависимость силы от числа магнитов.

3.1. Опыт. Высота верха трубки около 30 см, число шариков $n = 1 \dots 5$ в пластиковой трубочке, по 5 измерений времени.

n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$, с	V , см/с	$\ln n$	$\ln V$
1	4,62	4,54	4,50	4,56	4,50	4,544	11,0	0,000	2,398
2	3,69	3,71	3,74	3,75	3,70	3,718	13,4	0,693	2,599
3	3,08	3,04	3,10	3,04	3,10	3,072	16,3	1,099	2,790
4	2,57	2,55	2,46	2,51	2,48	2,514	19,9	1,386	2,990
5	2,29	2,21	2,27	2,25	2,20	2,244	22,3	1,609	3,104



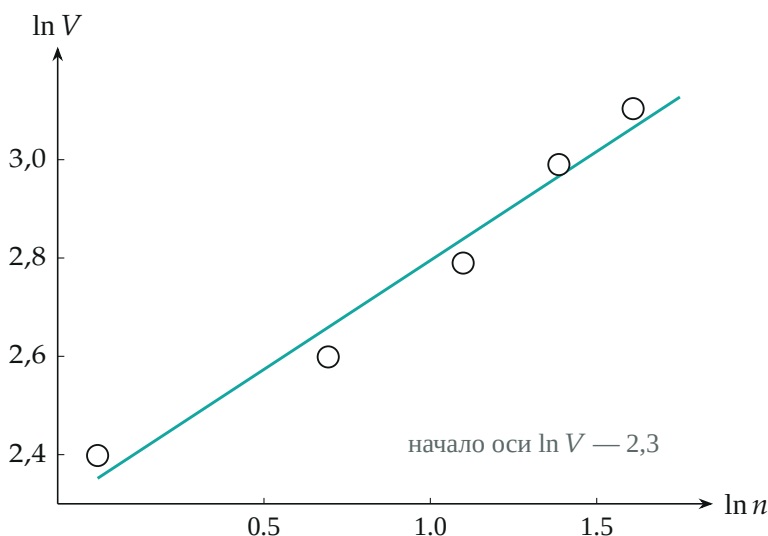
$V(n)$: зависимость похожа на корень.

3.2. Показатель γ . Уравнение равномерного движения трубочки: вязкая сила $\beta_1 n^\gamma V$ уравнивает составляющую силы тяжести минус

трение, обе пропорциональны числу шариков (массой самой трубочки пренебрегаем): $\beta_1 n^\gamma V = nmg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$. Отсюда

$$V = A n^{1-\gamma}, \quad A = \frac{mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\beta_1}.$$

Корневой вид графика $V(n)$ подсказывает $1 - \gamma = \frac{1}{2}$, то есть $\gamma \approx \frac{1}{2}$. Точнее — прологарифмировать: $\ln V = (1 - \gamma) \ln n + \ln A$, и по наклону прямой в координатах $\ln n, \ln V$ найти показатель.



Логарифмические координаты: наклон прямой $1 - \gamma$.

По МНК наклон равен $1 - \gamma = 0,44 \pm 0,09$, откуда $\gamma = 0,56 \pm 0,09$. Предположение $\gamma = 1/2$ укладывается в погрешность — сила магнитной вязкости растёт с числом магнитов медленнее, чем их число ($n^{1/2}$ при n^1 у силы тяжести).

Проверка. Размерности: β — Н·с/м, отношение $F_0/mg = V_0/(KL)$ безразмерно (K — с⁻¹). Согласованность частей 1 и 2: точки обеих серий дают одну и ту же физику — линейный рост V с $\sin \alpha$ плюс сдвиг от трения; оценка $\mu \approx 0,3$ правдоподобна для пластика по алюминию. Ограничение метода: считали движение равномерным, поэтому на ко-

ротких высотах (малая скорость) результат чувствителен к остаточному разгону.

Ответ. 1.1) $V = L/t$; 1.3) $\Delta V \approx 0,07$ см/с (при $h = 12,4$ см); 1.4) формула (1) применима, трением пренебречь нельзя; 1.5) $\frac{F_0}{mg} = \frac{V_0}{KL} \approx 2,4 \cdot 10^{-2}$; 2.2) $Y = \frac{V}{\cos \alpha}$, $X = \operatorname{tg} \alpha$, $\mu = -\frac{b}{a}$; 2.3–2.4) $\mu = 0,30 \pm 0,05$; 3.2) $\gamma \approx \frac{1}{2}$ (по графику $\gamma = 0,56 \pm 0,09$).