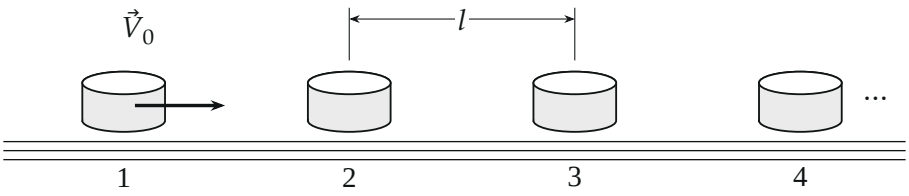
Три цепочки

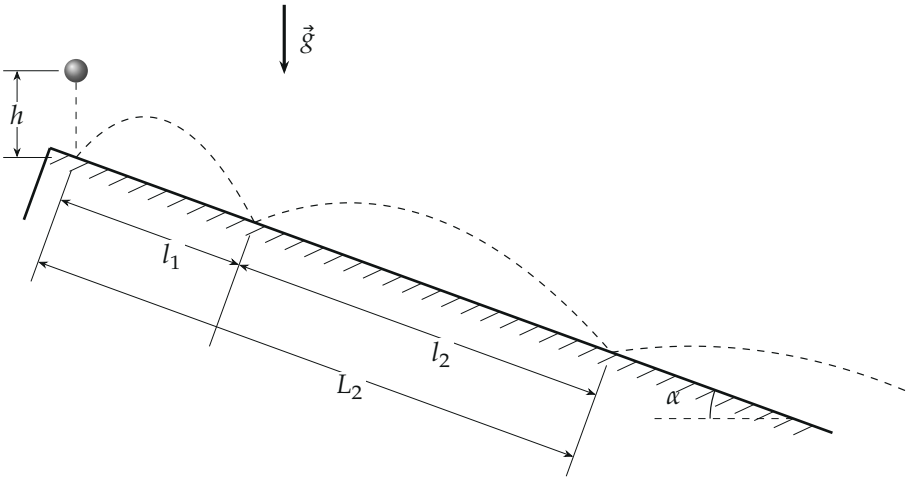
Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 10 класс, задача 1]

Задача 1.1. В гладком горизонтальном прямом желобе лежат N одинаковых шайб на равных расстояниях l друг от друга. Диаметры шайб значительно меньше расстояния между ними. Первой шайбе толчком сообщают скорость V_0 вдоль желоба. Столкновения между шайбами абсолютно неупругие.



1.1 Рассчитайте, через какое время после толчка сдвинется последняя шайба.

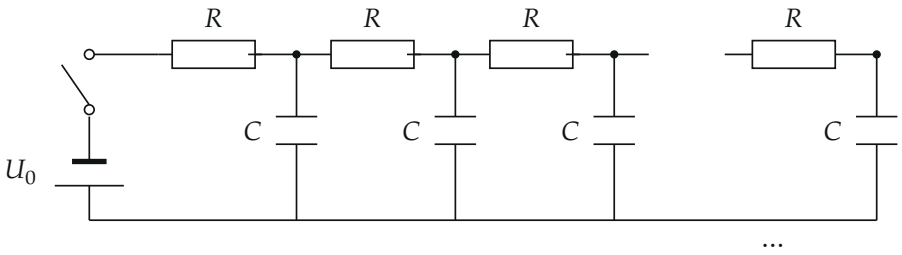
Задача 1.2. Небольшой гладкий шарик падает с высоты h на твёрдую длинную наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и абсолютно упруго отражается от неё. Сопротивлением воздуха пренебречь.



1.2.1 Найдите расстояние между точками последовательных столкновений шарика с плоскостью l_k (см. рис.).

1.2.2 Найдите смещение шарика вдоль наклонной плоскости L_k за k пролётов между ударами.

Задача 1.3. Электрическая цепь, состоящая из N одинаковых звеньев, подключена к источнику постоянного напряжения U_0. Сопротивление каждого резистора равно R, ёмкость каждого конденсатора — C. Конденсаторы не заряжены, ключ замыкают.



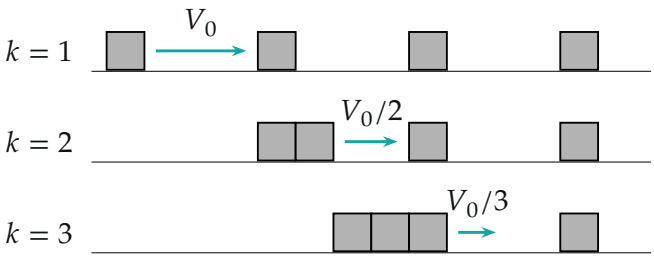
1.3.1 Найдите значение силы тока через источник сразу после замыкания цепи.

1.3.2 Найдите, какой суммарный электрический заряд протечёт через источник до прекращения тока в цепи.

▲ **Решение. Задача 1.1.**

Что происходит. Первая шайба доходит до второй, они слипаются и дальше идут вместе, но медленнее: масса выросла, а импульс остался. Пара догоняет третью, слипается с ней, скорость падает ещё, и так до последней шайбы. Последняя шайба сдвинется в момент удара по ней группы из $N-1$ слипшихся шайб. Главная идея: на каждом перегоне скорость известна из закона сохранения импульса, поэтому время каждого перегона находится сразу, а полное время — это сумма времён.

Обозначения. m — масса одной шайбы; v_k — скорость группы из k слипшихся шайб после $(k-1)$-го столкновения; τ_k — время, за которое эта группа проходит путь до следующей шайбы.



Моменты сразу после столкновения: слева — группа слипшихся шайб, справа — ещё неподвижные шайбы (для наглядности показаны шайбы 1–4).

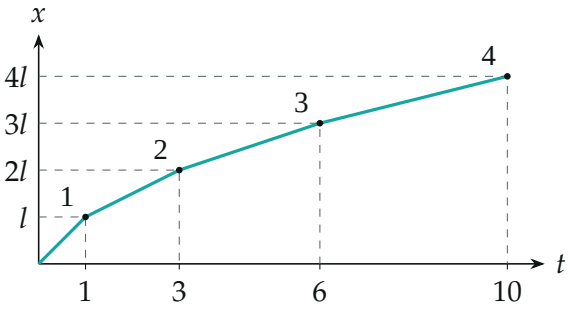
1. Скорость группы. Желоб гладкий, горизонтальных внешних сил нет, поэтому импульс системы шайб при каждом столкновении сохраняется. Сразу после столкновения, в котором группа стала состоять из k шайб, их суммарный импульс равен начальному импульсу первой шайбы:

$$mV_0 = k\,m\,v_k \quad \Rightarrow \quad v_k = \frac{V_0}{k}.$$

Обратите внимание: энергия при таких ударах не сохраняется, пользоваться нужно только импульсом.

2. Время одного перегона. Диаметры шайб много меньше l, поэтому группа из k шайб проходит до следующей шайбы путь l. Скорость на этом перегоне постоянна:

$$\tau_k = \frac{l}{v_k} = k\,\frac{l}{V_0}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$



время t в единицах l/V_0

График положения «головы» группы (пример $N = 5$): точки излома — столкновения с шайбами 2, 3, 4, 5, наклон прямой падает как V_0/k.

3. Складываем времена. Последняя шайба сдвинется в момент столкновения группы из $N - 1$ шайб с ней, то есть после всех $N - 1$ перегонов:

$$T = \sum_{k=1}^{N-1} \tau_k = \frac{l}{V_0} \sum_{k=1}^{N-1} k = \frac{l}{V_0} \cdot \frac{(N-1)N}{2}.$$

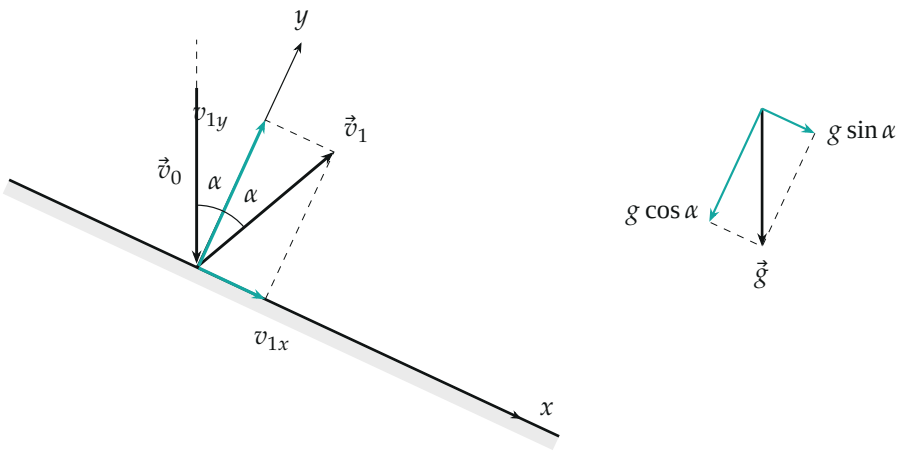
Здесь $1 + 2 + \cdots + (N - 1)$ — сумма арифметической прогрессии.

Проверка. Размерность: l/V_0 — время, множитель безразмерен. При $N = 2$ получаем $T = l/V_0$: первая шайба просто проходит l со скоростью V_0. При $N = 3$: $T = 3l/V_0$, это l/V_0 до первого удара и $2l/V_0$ для пары со скоростью $V_0/2$, как и должно быть. Для больших N время растёт как N^2: группа тяжелеет, и каждая следующая шайба догоняется всё дольше.

Задача 1.2.

Что происходит. Шарик падает вертикально, ударяется о наклонную плоскость и отлетает под тем же углом к нормали, с той же по модулю скоростью. Дальше — полёт под действием одной силы тяжести до следующего удара, и всё повторяется. Удобная система координат — связанная с плоскостью: ось x вдоль плоскости вниз по склону, ось y перпендикулярно ей. В ней ускорение свободного падения имеет две составляющие, и каждое движение простое: вдоль x — равноускоренное, вдоль y — такое же, как подбрасывание шарика вверх с упругим отражением от пола. Главное наблюдение: время между ударами всегда одно и то же, потому что удар не меняет модуль нормальной скорости.

Обозначения. v_0 — скорость шарика перед первым ударом; начало отсчёта O — точка первого удара; τ — время между двумя последовательными ударами; L_k — смещение вдоль плоскости от точки первого удара за k пролётов (то есть координата $(k + 1)$-го удара), l_k — расстояние между k-м и $(k + 1)$-м ударами.



Слева: скорость перед ударом $\vec{v}_0$ (вертикально вниз), после удара $\vec{v}_1$ того же модуля и её проекции. Справа: ускорение свободного падения в осях x, y (для ясности вектор $g\cos\alpha$ показан со знаком «против y»).

1. Скорость перед первым ударом. Закон сохранения механической энергии для шарика при падении с высоты h (сопротивления нет):

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Скорость направлена вертикально вниз. Нормаль к плоскости (ось y) отклонена от вертикали на угол α, поэтому проекции скорости на оси x и y равны $v_0 \sin\alpha$ и $-v_0 \cos\alpha$.

2. Что делает удар. Плоскость гладкая и неподвижная (длинная и твёрдая), поэтому сила удара направлена по нормали, то есть вдоль y. Значит, проекция скорости на x при ударе не меняется. Удар абсолютно упругий — энергия сохраняется, так что нормальная составляющая меняет только знак. После первого удара:

$$v_{1x} = v_0 \sin\alpha, \qquad v_{1y} = +v_0 \cos\alpha.$$

3. Движение между ударами. Единственная сила — тяжесть, запишем второй закон Ньютона в проекциях (рисунок справа):

$$a_x = g \sin\alpha, \qquad a_y = -g \cos\alpha.$$

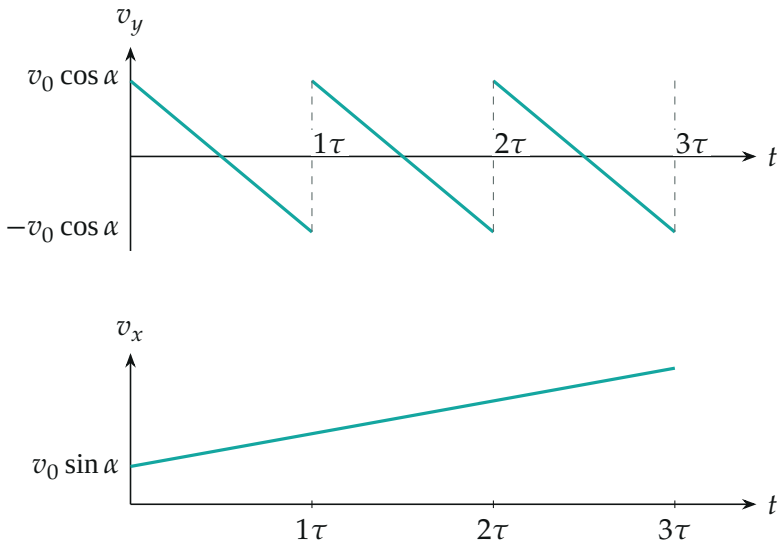
По оси y закон движения от первого удара, пока шарик не вернётся на плоскость:

$$y = v_0 \cos\alpha\, t - \frac{g\cos\alpha}{2} t^2.$$

Приравняв y нулю, найдём время между ударами:

$$\tau = \frac{2v_0}{g}.$$

К моменту второго удара $v_y = v_{1y} - g\cos\alpha\,\tau = -v_0\cos\alpha$, после отражения опять $+v_0\cos\alpha$. Значит, каждый новый полёт по оси y точно повторяет предыдущий, и *время между всеми последовательными ударами одинаково*: $\tau = 2v_0/g = 2\sqrt{2h/g}$.



Проекции скорости на оси: v_y — пилообразная (удары возвращают знак), v_x — линейный рост без скачков.

4. Ответ на вопрос 1.2.2. Вдоль оси x удары ничего не меняют, поэтому движение по x — один сплошной равноускоренный процесс. За

время $k\tau$ шарик сместится на

$$L_k = v_0 \sin\alpha \cdot k\tau + \frac{g\sin\alpha}{2}(k\tau)^2 = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\,(k+k^2) = 4h\sin\alpha\; k(k+1),$$

где использованы $\tau = 2v_0/g$ и $v_0^2 = 2gh$.

5. Ответ на вопрос 1.2.1. Расстояние между k-м и $(k+1)$-м ударами — разность смещений:

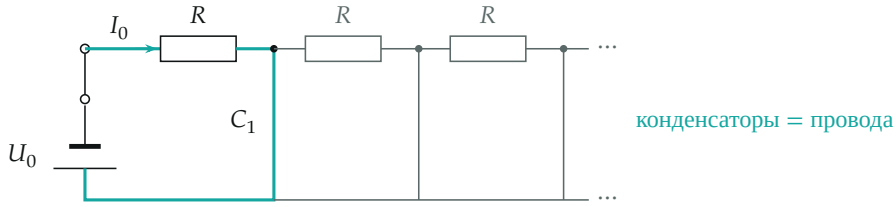
$$l_k = L_k - L_{k-1} = 4h\sin\alpha\,[k(k+1) - (k-1)k] = 8kh\sin\alpha.$$

Проверка. Второй способ: за равные промежутки τ тело с постоянным ускорением a_x проходит пути, различающиеся на $a_x\tau^2 = g\sin\alpha \cdot 4v_0^2/g^2 = 8h\sin\alpha$. Первый путь $l_1 = L_1 = 8h\sin\alpha$, значит, $l_k = 8kh\sin\alpha$ — совпало. Ещё: сумма $l_1 + \cdots + l_k = 8h\sin\alpha \cdot k(k+1)/2 = L_k$. При $\alpha \to 0$ все $l_k \to 0$: шарик прыгает на горизонтальном полу на месте, как и должно быть. Смысл: расстояния между ударами растут арифметически, потому что за одно и то же время τ скорость вдоль склона каждый раз прибавляется на одну и ту же величину.

Задача 1.3.

Что происходит. В первый момент конденсаторы разряжены: напряжение на них равно нулю, и для тока они ведут себя как провода. В конце, когда ток прекращается, конденсаторы заряжены, ток через них не идёт, зато на резисторах напряжения нет. Оба вопроса решаются рассмотрением этих двух предельных состояний цепи.

Обозначения. Узлы цепи — точки между резистором и конденсатором, U_k — напряжение на k-м конденсаторе.

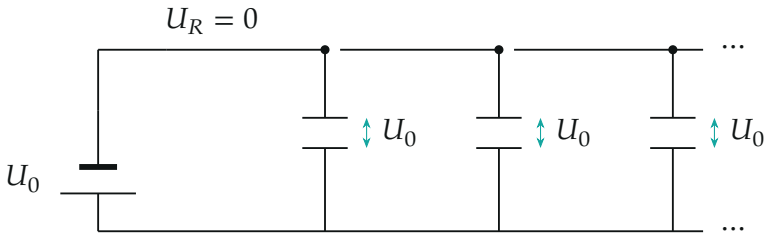


Сразу после замыкания ключа: конденсаторы заменены проводниками. Весь

ток I_0 идёт через R и первый конденсатор; серые звенья подключены к двум точкам одного потенциала.

1. Сразу после замыкания (вопрос 1.3.1). Заряд конденсатора в этот момент равен нулю, поэтому $U_k = q_k/C = 0$ у всех, и напряжение на конденсаторе меняться скачком не может. Тогда первый узел соединён с нижним проводом через нулевое напряжение, то есть имеет потенциал нижнего провода. Остальные звенья присоединены к двум точкам одного потенциала, напряжения на них нет, и тока в них нет. Весь ток идёт по контуру «источник — первый резистор — первый конденсатор». Закон Ома для первого резистора, к которому приложено полное напряжение источника:

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$



Конец процесса: ток прекратился, на всех резисторах напряжение нуль (они — обычные провода), все конденсаторы заряжены до U_0.

2. В конце (вопрос 1.3.2). Когда ток в цепи прекратится, падение напряжения на каждом резисторе станет $IR = 0$, и потенциал каждого узла равен потенциалу верхней клеммы источника. Значит, напряжение на каждом из N конденсаторов равно U_0, и заряд каждого $q_1 = CU_0$.

Заряд, протёкший через источник, весь осел на конденсаторах (других мест для него нет, цепь замкнута только через них). По закону сохранения заряда он равен суммарному заряду N конденсаторов:

$$q = N\,C\,U_0.$$

Обратите внимание: в ответе C стоит в числителе, заряд пропорционален ёмкости. В официальном тексте решения в этом месте опечатка

(NU_0/C — это не заряд, а напряжение).

Проверка. Размерность: $[CU]$ — заряд, а $I_0 = U_0/R$ — сила тока. Для $N = 1$ цепь — обычная RC-цепочка, и заряд CU_0 хорошо известен. Одна и та же формула $I_0 = U_0/R$ верна при любом N: стоит заменить конденсаторы проводами, и от остальных звеньев ничего не остаётся. Смысл: в начале цепь «видит» только первый резистор, в конце — только накопленный заряд, и ни то, ни другое не зависит от того, как заряд распределялся по пути.

Ответ. 1.1) $T = \dfrac{N(N-1)}{2}\dfrac{l}{V_0}$; 1.2.1) $l_k = 8kh\sin\alpha$; 1.2.2) $L_k = 4k(k+1)h\sin\alpha$; 1.3.1) $I_0 = \dfrac{U_0}{R}$; 1.3.2) $q = NCU_0$.