Столкновение ядер

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 10 класс, задача 2] Для изучения ядерных взаимодействий широко используется экспериментальный метод столкновения ядер различных химических элементов.

Для ускорения ядер, которые значительно тяжелее протонов, используются линейные ускорители. Во всех частях задачи считайте, что скорости частиц значительно меньше скорости света.

В данной задаче рассматривается столкновение ускоренных ядер углерода $^{12}_{6}\mathrm{C}$ и неподвижных ядер свинца $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$.

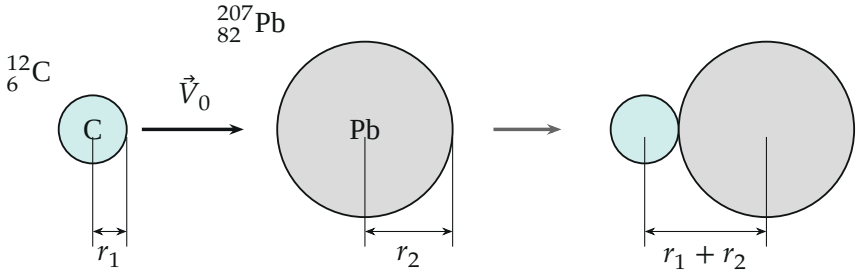
Числа в обозначениях ядер означают: верхнее число — массовое число A (общее число протонов и нейтронов в ядре), нижнее число — зарядовое число Z (число протонов в ядре). Эти числа позволяют найти:

- заряд ядра $q = Ze$, где $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона;
- массу ядра, которая приближённо равна $m = Am_p$, где $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг;
- радиус ядра $r = aA^{1/3}$, где $a = 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Часть 1. Порог реакции.

Ядро углерода $^{12}_{6}\mathrm{C}$ ускоряется в ускорителе, проходя ускоряющую разность потенциалов U, и приобретая скорость V_0. Ядро-мишень ядро свинца можно считать неподвижным и свободным. Чтобы между ядрами началась ядерная реакция, необходимо, чтобы центры ядер сблизились на расстояние меньшее, чем сумма их радиусов.



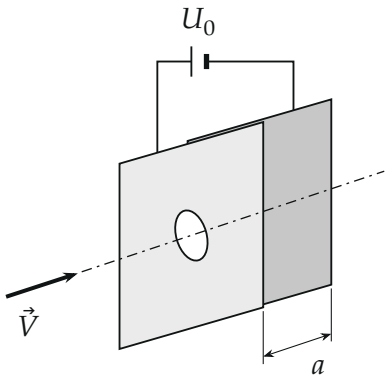
1.1 Рассчитайте, какую минимальную ускоряющую разность потенциалов U_0 должно пройти ядро углерода, чтобы началась ядерная реакция его взаимодействия с ядром свинца.

1.2 Рассчитайте, чему будет равна скорость ядра углерода V_0 при прохождении разности потенциалов U_0.

1.3 Рассчитайте минимальную ускоряющую разность потенциалов и скорость ядра, если ускоряется ядро свинца, а мишенью является ядро углерода.

Часть 2. Ускоряющая система.

Для ускорения ядер используется несколько ячеек разгона. Каждая такая ячейка состоит из двух больших параллельных металлических пластин, расположенных перпендикулярно направлению движения частиц. В пластинах вырезаны два коаксиальных круглых отверстия радиуса R. Ускоряемые частицы движутся вдоль оси этих отверстий. Расстояние между пластинами равно a и в несколько раз меньше радиусов отверстия. На пластины подаётся импульсное напряжение U_0, которое включается при подлёте частиц к первой пластине и выключается при вылете частиц за вторую пластину.

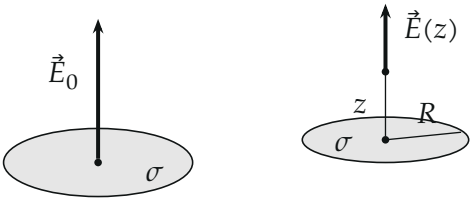


2.1 Рассчитайте, какую кинетическую энергию ΔW приобретёт ядро углерода при пролёте через ускоряющую ячейку.

Подсказка. Равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ плоская пластина создаёт однородное электрическое поле, напряжённость которого обозначим $\vec{E}_0$. Равномерно заряженный диск радиуса R создаёт такое

электрическое поле, что на оси диска на расстояниях $z \ll R$ его напряжённость описывается приближённой формулой

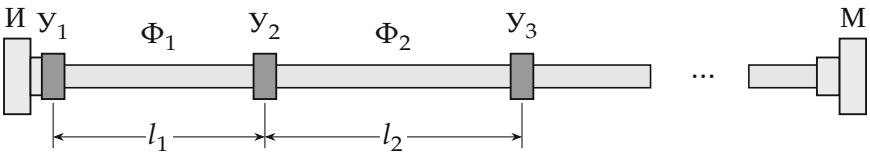
$$E(z) = E_0\left(1 - \frac{z}{R}\right). \qquad (1)$$



2.2 Используя определение электрической ёмкости и формулу для ёмкости плоского конденсатора, выразите напряжённость поля E_0, создаваемого равномерно заряженной плоскостью, через поверхностную плотность заряда σ.

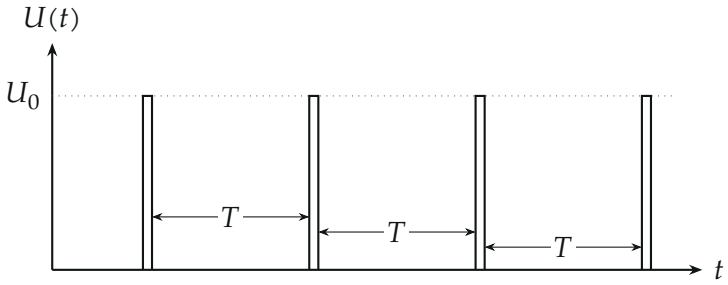
Часть 3. Линейный ускоритель.

Линейный ускоритель состоит из: И — источник ускоряемых ядер; $У_1$, $У_2$ ... — ускоряющие ячейки, их общее число равно N; $Ф_1$, $Ф_2$ ... — трубы с фокусирующими магнитными устройствами (в данной задаче не рассматриваются), их длины обозначены $l_1, l_2 \ldots$; М — мишень с неподвижными ядрами. Внутри системы находится вакуум.



Будем считать, что на входе в первую ускоряющую ячейку $У_1$ скорости ядер равны нулю. На все ускоряющие ячейки одновременно подаётся импульсное напряжение, одинаковое на всех ускоряющих ячейках. Частота следования импульсов напряжения постоянна. Причём она настраивается так, что разгоняемые ядра ускоряются в каждой ячейке.

Схематический вид зависимости напряжения, подаваемого на все ускоряющие ячейки, от времени показан на рисунке. Временем пролёта частиц через ускоряющие ячейки пренебрежимо мало. Длина первой трубы равна l_1.

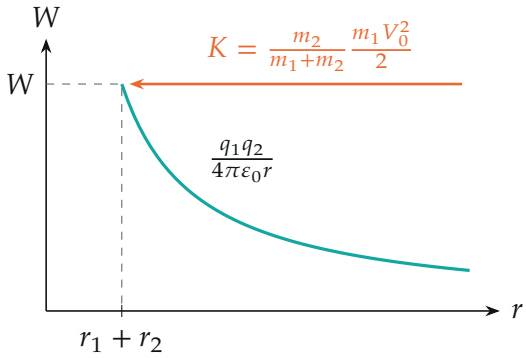


3.1 Рассчитайте длины остальных труб l_n, при которых ядра будут ускоряться в каждой ускоряющей ячейке.

▲ **Решение. Часть 1. Порог реакции.**

Что происходит. Налетающее ядро углерода отталкивается от ядра свинца, и по мере сближения его кинетическая энергия переходит в энергию электрического взаимодействия. Но ядро свинца тоже начнёт двигаться (оно «свободное»), поэтому не вся энергия идёт на сближение: в момент наибольшего сближения оба ядра движутся с одной скоростью, и часть энергии остаётся кинетической. Реакция начнётся, если центры ядер сблизятся до расстояния $r_1 + r_2$.

Обозначения. Индекс 1 — углерод (налетающее ядро), 2 — свинец; A, Z — массовое и зарядовое числа; V — общая скорость ядер в момент наибольшего сближения; W — потенциальная энергия кулоновского взаимодействия.



Порог реакции: энергия движения, доступная для сближения (в системе центра масс), равна потенциальной энергии в точке $r = r_1 + r_2$.

1.1. Минимальная разность потенциалов.

1. Закон сохранения импульса для системы двух ядер (внешних сил нет). В момент наибольшего сближения скорости ядер одинаковы:

$$m_1V_0 = (m_1 + m_2)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}V_0.$$

2. Закон сохранения энергии между началом (ядра далеко, ядро 2 покоится) и моментом наибольшего сближения:

$$\frac{m_1V_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} + W.$$

Подставив V, находим энергию, которая уходит в потенциальную:

$$W = \frac{m_1V_0^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1V_0^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

3. Порог реакции. Ядра должны сблизиться до $r_1 + r_2$, и W при этом равно

$$W = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0(r_1 + r_2)} = \frac{Z_1Z_2\,e^2}{4\pi\varepsilon_0\,a\,(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})}.$$

4. Связь с разностью потенциалов. Кинетическая энергия налета-

ющего ядра после ускорения: $\dfrac{m_1 V_0^2}{2} = q_1 U = Z_1 e U$. Тогда условие $W = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} Z_1 e U$ даёт

$$U_0 = \frac{A_1 + A_2}{A_2} \cdot \frac{Z_2}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}} \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a},$$

где использовано, что $m_i = A_i m_p$. Численно: $r_1 = a A_1^{1/3} = 2{,}98 \cdot 10^{-15}$ м, $r_2 = 7{,}69 \cdot 10^{-15}$ м, $r_1 + r_2 = 1{,}07 \cdot 10^{-14}$ м; $W = \dfrac{6 \cdot 82\, e^2}{4\pi\varepsilon_0 (r_1 + r_2)} \approx 1{,}06 \cdot 10^{-11}$ Дж ≈ 66 МэВ.

$$U_0 \approx \frac{219}{207} \cdot \frac{1{,}06 \cdot 10^{-11}}{6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 1{,}2 \cdot 10^7 \text{ В}.$$

1.2. Скорость. Из $\dfrac{A_1 m_p V_0^2}{2} = Z_1 e U_0$ получаем

$$V_0 = \sqrt{\frac{2 Z_1 e U_0}{A_1 m_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}17 \cdot 10^7}{12 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}} \approx 3{,}35 \cdot 10^7 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Это около $0{,}11\,c$, так что условие «скорости много меньше скорости света» выполнено.

1.3. Ускоряется свинец. Роли ядер меняются местами: в формуле для U_0 индексы 1 и 2 переставляются ($m_2 \to m_1$, $q_2 \to q_1$, $A_2 \to A_1$, $Z_2 \to Z_1$):

$$U = \frac{A_1 + A_2}{A_1} \cdot \frac{Z_1}{A_1^{1/3} + A_2^{1/3}} \cdot \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a} \approx 1{,}5 \cdot 10^7 \text{ В}.$$

Здесь «налетающим» стал свинец, а мишенью — более лёгкий углерод, поэтому в системе центра масс остаётся доля $m_\text{C}/(m_\text{C} + m_\text{Pb}) = 12/219$ от энергии: свинец надо разгонять сильнее. Скорость при обмене не ме-

няется: из шагов 1–3 следует

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{V_0^2}{2} = W \quad \Rightarrow \quad V_0^2 = \frac{2W(m_1 + m_2)}{m_1 m_2},$$

а это выражение симметрично по индексам. Значит, и у свинца $V_0 \approx 3{,}35 \cdot 10^7$ м/с: это скорость сближения (относительная), она определяется только W и приведённой массой.

Проверка. Размерность: $e/(4\pi\varepsilon_0 a)$ — вольты, множители безразмерны. Проверка предела: при очень лёгкой мишени ($m_2 \ll m_1$) множитель $m_2/(m_1+m_2) \to 0$ и $U \to \infty$: лёгкая мишень уносит почти всю энергию. При тяжёлой мишени ($m_2 \gg m_1$) $U_0 \to W/q_1$, как для неподвижной стенки.

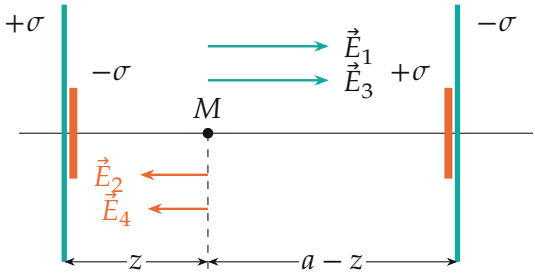
Часть 2. Ускоряющая ячейка.

Что происходит. Ядро летит вдоль оси отверстий двух параллельных пластин. Поле на оси найдём по принципу суперпозиции: пластина с отверстием — это сплошная пластина с плотностью заряда σ, на которую «наложен» диск радиуса R с плотностью $-\sigma$. То же для второй пластины (заряд $-\sigma$ и диск $+\sigma$). Поле каждой части известно, останется сложить.

2.2. Поле одной плоскости. Начнём с этого пункта, он нужен для всего остального. Для плоского конденсатора с пластинами площадью S, расстоянием d и зарядом $\pm q$, $q = \sigma S$, ёмкость по определению $C = q/U$ и по формуле $C = \varepsilon_0 S/d$. Поле между пластинами однородно и по принципу суперпозиции равно сумме двух одинаковых полей E_0 каждой пластины: $U = 2E_0 d$. Отсюда

$$\frac{\sigma S}{2E_0 d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Обратите внимание: поле *между* пластинами равно $2E_0$ и напряжение $U_0 = 2E_0 a$, а не $E_0 a$.



Поля на оси в точке M: E_1, E_3 — сплошные пластины; E_2, E_4 — «диски отверстий»; длины стрелок E_2, E_4 немного меньше E_0 (множитель $1 - z/R$).

2.1. Поле на оси. Направим ось по движению ядра. В точке на расстоянии z от первой пластины ($0 < z < a$) складываем четыре поля:

- сплошная пластина $+\sigma$ отталкивает вперёд: $E_1 = E_0$;
- диск $-\sigma$ на её месте притягивает назад, расстояние z: $E_2 = -E_0(1 - \frac{z}{R})$ по формуле (1);
- сплошная пластина $-\sigma$ притягивает вперёд: $E_3 = E_0$;
- диск $+\sigma$ на второй пластине отталкивает назад, расстояние $a - z$: $E_4 = -E_0(1 - \frac{a-z}{R})$.

Сумма не зависит от z:

$$E_\Sigma = 2E_0 - E_0\left(2 - \frac{z}{R} - \frac{a-z}{R}\right) = E_0\,\frac{a}{R} = \frac{U_0}{2R}.$$

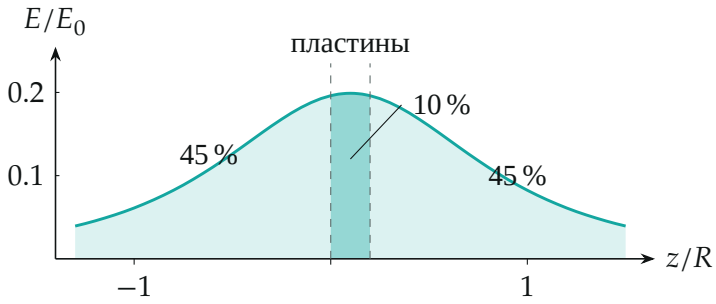
Последнее равенство — через $U_0 = 2E_0 a$ (видно из пункта 2.2).

Сколько энергии на промежутке между пластинами. Поле однородно, значит работа сил поля на отрезке длиной a

$$\Delta W_{\text{пл}} = qE_\Sigma a = qE_0\frac{a^2}{R} = qU_0\frac{a}{2R}.$$

Это только часть полной энергии. Формулы поля диска применимы и по другую сторону пластины: слева от первой пластины на расстоянии d суммарное поле равно $E_0(1 - \frac{d}{R}) - E_0(1 - \frac{d+a}{R}) = E_0\frac{a}{R}$ — такое же, и так же справа от второй. Поле «просачивается» через отверстия на расстояние порядка R и там тоже ускоряет ядро. Точное поле диска на

оси $E_0\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$ (при $z \ll R$ оно совпадает с (1)) показывает, как оно спадает.



Поле на оси ячейки при $a/R = 0{,}2$. Площадь под кривой — работа поля на единичный заряд: на промежутке между пластинами набирается $\approx 10\,\%$ $(= a/2R)$, по 45 % — в областях слева и справа.

3. Полная энергия. Работа поля на всём пути — это q, умноженное на разность потенциалов между точкой далеко слева и точкой далеко справа. Далеко от отверстий поле пластин как проводников не проникает, потенциал каждой полуплоскости — потенциал своей пластины, и разность потенциалов равна напряжению U_0 между пластинами. Проверим по модели: слева $\int_0^\infty [\,f(d) - f(d+a)\,]\,\mathrm{d}d = \int_0^a f(d)\,\mathrm{d}d \approx E_0 a$, столько же справа, плюс $E_0 a^2/R$ в промежутке, итого $2E_0 a = U_0$. Поэтому, если напряжение подано на всё время пролёта (по условию),

$$\Delta W = qU_0.$$

Для ядра углерода $q = 6e$.

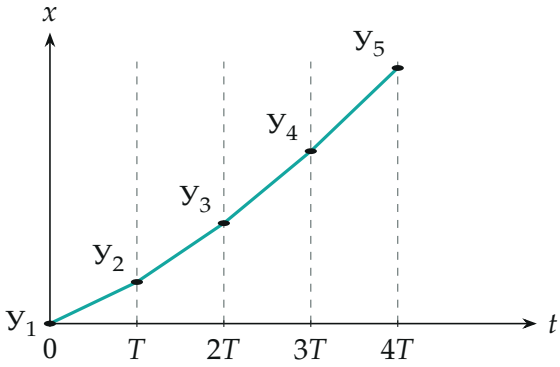
Обратите внимание: на самом промежутке между пластинами набирается только доля $a/(2R)$ от qU_0; в официальном решении эта доля (при ошибочном $U_0 = aE_0$) принята за всю энергию, $\Delta W = qU_0 a/R$. Для вопроса части 3 множитель роли не играет: нужно лишь, чтобы приращение энергии было одинаковым в каждой ячейке.

Часть 3. Линейный ускоритель.

Что происходит. Импульс включается на короткое время раз в период T, и в каждой ячейке ядро получает одну и ту же энергию ΔW —

но только если оно подлетает к ячейке в момент импульса. Значит, на каждую трубу ядро тратит ровно время T (или T с целым множителем, одинаковым для всех труб). Скорость растёт, поэтому каждая следующая труба должна быть длиннее.

Обозначения. V_n — скорость ядра после n-й ячейки (в n-й трубе); m — масса ядра.



Положение ядра в ускорителе (в единицах l_1): каждый излом — ускоряющая ячейка в момент импульса, наклон участков растёт как $\sqrt{n}$.

1. Энергия после n ячеек. В каждой ячейке ядро набирает одну и ту же энергию ΔW:

$$\frac{mV_n^2}{2} = n\,\Delta W \quad \Rightarrow \quad V_n = V_1\sqrt{n}, \qquad V_1 = \sqrt{\frac{2\Delta W}{m}}.$$

2. Условие синхронизации. Ядро должно за одно и то же время τ (равное периоду импульсов) пролетать любую трубу. На n-й трубе скорость постоянна и равна V_n:

$$\tau = \frac{l_1}{V_1} = \frac{l_n}{V_n} = \frac{l_n}{V_1\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad l_n = l_1\sqrt{n}.$$

Проверка. Для $n = 1$ получаем l_1. Длины труб растут как $\sqrt{n}$, а суммарная длина — как $n^{3/2}$, поэтому ускорители с большим числом ячеек длинные. Смысл: частота импульсов постоянна, а скорость растёт — значит, расстояние между ячейками должно расти в ту же сторону.

Ответ. 1.1) $U_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^7$ В; 1.2) $V_0 \approx 3{,}35 \cdot 10^7$ м/с; 1.3) $U \approx 1{,}5 \cdot 10^7$ В, скорость та же $\approx 3{,}35 \cdot 10^7$ м/с; 2.2) $E_0 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; 2.1) $\Delta W = qU_0$ (на промежутке между пластинами — $qU_0\dfrac{a}{2R}$); 3.1) $l_n = l_1\sqrt{n}$.