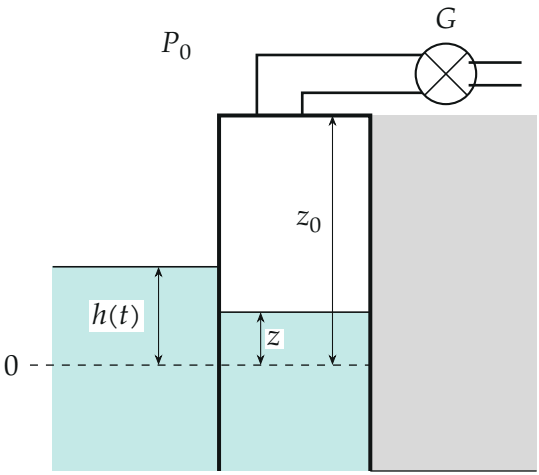
ВЭС — волновая электростанция

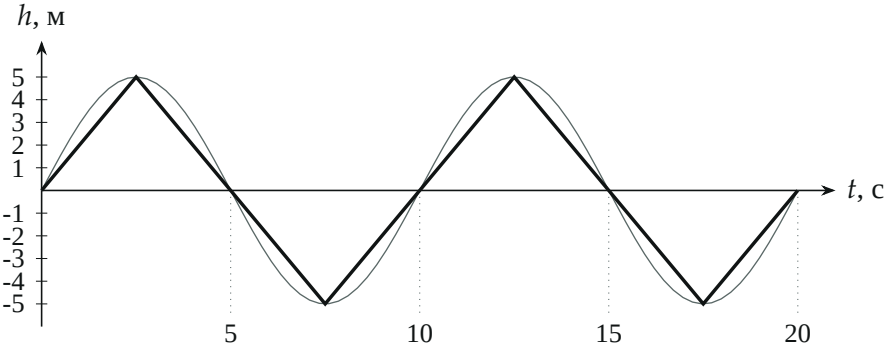
Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 10 класс, задача 3] Одним из нетрадиционных возобновляемых источников энергии может служить энергия морских волн. К настоящему времени разработано более десятка различных волновых электростанций (ВЭС), некоторые из которых показаны на рисунке. В данном задании Вам необходимо проанализировать работу одного из типов таких реально существующих ВЭС.

Упрощённая схема установки показана на рисунке. Прочный открытый снизу цилиндр вертикально закреплён у береговой скалы. Морская вода может поступать в этот рабочий цилиндр снизу. В верхней части трубы находится воздух. Выходная труба соединяет цилиндр с электрогенератором G, выходная труба генератора открыта в атмосферу. При подъёме уровня воды воздух вытесняется из цилиндра и приводит во вращение турбину генератора. При опускании уровня воды через ту же трубу атмосферный воздух всасывается внутрь рабочего цилиндра. При этом турбина также может вращаться, что приводит к выработке электроэнергии.



Для описания работы этой установки используются следующие приближения:

1. Воздух можно считать идеальным газом.
2. Вода внутри и снаружи рабочего цилиндра все время находится в квазиравновесном состоянии, т. е. давление, создаваемое водой, можно рассчитывать по законам гидростатики.
3. Генератор снабжен клапаном, который открывается, если разность давлений с разных сторон генератора достигает некоторого значения δP. При меньшей разности давлений труба оказывается полностью перекрыта. При открытом клапане (из-за наличия турбины) разность давлений остаётся постоянной и равной δP.
4. Все процессы происходят при постоянной температуре.
5. Разностью давлений воздуха в рабочем цилиндре и выходной трубе можно пренебречь.
6. Уровень воды вблизи рабочего цилиндра изменяется по периодическому закону, который можно приближённо описать кусочно-линейной функцией. На графике: плавная кривая — реальная зависимость, ломаная линия — приближение, которое используется в решении данной задачи.



В данной задаче удобно в качестве единицы давления использовать «метр водяного столба» — гидростатическое давление, создаваемое 1 метром водяного столба. Считайте, что 1 м.в.с. $= 1{,}0 \cdot 10^4$ Па.

Используйте следующие обозначения (смотрите схему установки):

- высота уровня воды вблизи рабочего цилиндра $h(t)$ — график этой функции приведён выше;

- высота уровня воды внутри рабочего цилиндра $z(t)$;
- высота верхней крышки рабочего цилиндра z_0.

Все эти величины отсчитываются от равновесного уровня моря.

В расчётах используйте следующие значения параметров:

- атмосферное давление $P_0 = 10$ м (водяного столба, что соответствует нормальному атмосферному давлению);
- температура воздуха и воды $t = 7{,}0\,^\circ\text{C}$;
- молярная масса воздуха $M = 29$ г/моль;
- универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К);
- площадь поперечного сечения рабочего цилиндра $S_0 = 10$ м^2;
- площадь поперечного сечения выходной трубы $s = 1{,}0$ м^2;
- разность давлений, при котором открывается клапан, и которая поддерживается постоянной при протекании газа через турбину, $\delta P = 2{,}0$ м;
- высота цилиндра над уровнем моря $z_0 = 7{,}0$ м;
- период волны $T = 10$ с;
- амплитуда волны $A = 5{,}0$ м.

Часть 1. Рабочий цикл установки.

1.1 Выразите давление воздуха в рабочем цилиндре (в метрах водяного столба) через атмосферное давление P_0 и высоты уровней воды вне цилиндра h и внутри его z.

Рассмотрим рабочий цикл установки. Считаем, что поверхность моря спокойна $h = 0$; вода в цилиндре находится также на нулевом уровне $z = 0$, давление воздуха внутри рабочего цилиндра равно атмосферному $P = P_0$. В момент времени $t = 0$ приходит волна.

1.2 Рассчитайте, при какой минимальной амплитуде волны A_{min}, установка начнёт вырабатывать электроэнергию.

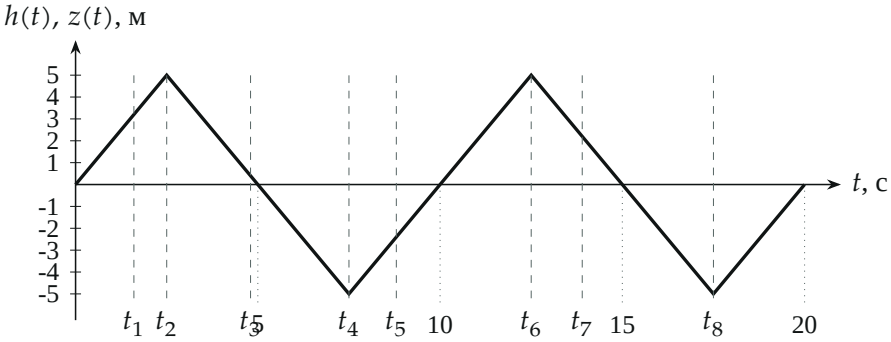
Далее будем считать, что амплитуда волн остаётся постоянной и равной $A = 5{,}0$ м.

1.3 Рассчитайте численное значение модуля скорости подъёма и опускания уровня воды вне установки v.

В данной части задания необходимо описать цикл работы установки, то есть найти зависимости уровня воды $z(t)$ и давления воздуха $P(t)$ в

рабочем цилиндре от времени. Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ $z = 0$ и $P = P_0$. Уровень воды снаружи установки изменяется по закону, приведённому ранее на графике. В Бланках ответов приведен график этой зависимости.

На этом графике Вы должны построить зависимость $z(t)$. Для этого достаточно рассчитать значения указанных параметров в узловых точках, показанных на рисунке. Точки 1, 3, 5, 7 соответствуют открытию или закрытию клапана турбины генератора, их положение вам предстоит найти, поэтому на рисунке они показаны условно. График зависимости $z(t)$ можно изобразить в виде отрезков прямых между узловыми точками (за исключением участка 1-2).



Положения t_1, t_3, t_5, t_7 на этом рисунке условные.

1.4 Найдите явный вид зависимости уровня воды в цилиндре $z(t)$ в интервале времени от нуля до t_1. Постройте график этой зависимости.

1.5 Найдите, в какой момент времени t_1 воздух начнёт поступать в турбину. Рассчитайте уровень воды вне цилиндра h_1, уровень воды z_1 и давление воздуха P_1 в цилиндре в этот момент времени.

1.6 Рассчитайте значения высоты уровня вне цилиндра h_k, уровня воды в цилиндре z_k, давления воздуха P_k в указанных узловых точках и соответствующие моменты времени t_k ($k = 1, 2 \ldots 8$). Полученные значения занесите в Таблицу 1 Листов ответов. Приведите (там, где это необходимо) формулы, по которым проведены расчёты. Постройте схематический график зависимости $z(t)$.

1.7 На отдельном бланке постройте схематическую диаграмму процесса изменения состояния воздуха в рабочем цилиндре в координатах $(P, (z_0 - z))$.

1.8 Укажите, начиная с какой узловой точки процесс далее будет периодически повторяться, укажите также конечную точку цикла.

Часть 2. Энергетические характеристики ВЭС.

В этой части задания Вы должны рассчитать энергетические характеристики рассматриваемой установки в режиме установившегося цикла её работы. В данной части используйте обозначения и численные значения параметров, найденные в Части 1.

2.1 Укажите, на каких участках процесса (между какими узловыми точками) генератор вырабатывает электроэнергию.

2.2 Рассчитайте массу воздуха, который выходит из рабочего цилиндра за один цикл работы установки.

2.3 Оцените кинетическую энергию воздуха, выходящего из рабочего цилиндра на входе в турбину генератора за один цикл работы установки.

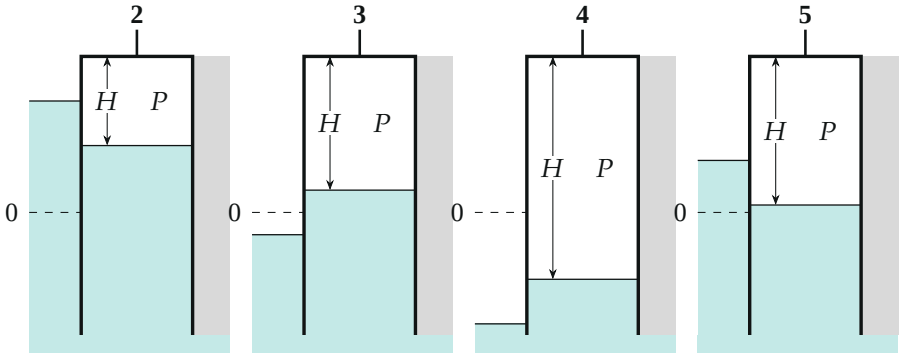
2.4 Рассчитайте работу, совершенную воздухом, выходящим из рабочего цилиндра, над турбиной генератором за один цикл работы установки.

2.5 Считая, что КПД электрогенератора равен $\eta_0 = 60\%$, рассчитайте среднюю мощность рассмотренной установки за один цикл её работы.

▲ **Решение. Часть 1. Рабочий цикл установки.**

Что происходит. Волна поднимает воду снаружи, вода входит в цилиндр снизу и сжимает воздух. Пока разность давлений на генераторе меньше δP, клапан закрыт, воздуха в цилиндре столько же, сколько было, и он сжимается изотермически. Как только давление воздуха на δP превысит атмосферное, клапан открывается, воздух идёт через турбину, а давление держится на уровне $P_0 + \delta P$. Когда вода снаружи опускается, давление в цилиндре падает, клапан закрывается; в какой-то момент давление становится на δP ниже атмосферного, клапан открывается в другую сторону и воздух всасывается внутрь. Главные идеи: давление находим по гидростатике, закрытый клапан — закон Бойля — Мариотта, открытый клапан — давление постоянно, и уровень воды в цилиндре просто следует за уровнем снаружи.

Обозначения. Все давления — в метрах водяного столба (м.в.с.). $H = z_0 - z$ — высота воздушного столба в цилиндре (объём воздуха равен $S_0 H$); P — давление воздуха в цилиндре; v — скорость движения воды снаружи.



Состояния воздуха в узловых точках 2–5 (числа в метрах; под рисунками — что происходит с клапаном). Вода: слева — снаружи, в цилиндре — внутри.

1.1. Давление в цилиндре. Рассмотрим уровень воды внутри цилиндра, на высоте z. Здесь давление воды равно давлению воздуха P. На той же высоте снаружи давление создаёт атмосфера и столб воды глубиной $h - z$ под поверхностью, то есть $P_0 + (h - z)$. Давления на одной высоте равны (квазиравновесие):

$$P = P_0 + h - z.$$

1.2. Минимальная амплитуда. Электроэнергия вырабатывается, когда давление в цилиндре достигает $P_0 + \delta P = 12$ м.в.с. Это должно произойти самое позднее при наибольшем подъёме воды снаружи $h = A$. Пока клапан закрыт, воздух сжимается изотермически без потерь массы: закон Бойля — Мариотта для воздуха между начальным состоянием

(P_0, высота столба z_0) и состоянием открытия клапана:

$$(P_0 + \delta P)\,(z_0 - z_1) = P_0 z_0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 = \frac{2}{12} \cdot 7 = 1{,}17 \text{ м}.$$

Обратите внимание: в закон Бойля входит длина воздушного столба $z_0 - z$, а не уровень воды z. Уровень снаружи в этот момент найдём из 1.1:

$$h_1 = z_1 + (P_1 - P_0) = z_1 + \delta P = 3{,}17 \text{ м},$$

$$A_{\min} = h_1 = \frac{\delta P}{P_0 + \delta P} z_0 + \delta P \approx 3{,}2 \text{ м}.$$

1.3. Скорость уровня. За четверть периода уровень проходит путь A вверх, затем за половину периода опускается на $2A$, и скорость везде одна по модулю:

$$v = \frac{A}{T/4} = \frac{4A}{T} = 2{,}0\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

1.4. Закон $z(t)$ на участке $0 \dots t_1$. Клапан закрыт, снаружи $h = vt$. Из 1.1 $P = P_0 + h - z$, и закон Бойля — Мариотта $P\,(z_0 - z) = P_0 z_0$ даёт

$$(P_0 + h - z)(z_0 - z) = P_0 z_0 \;\Rightarrow\; z^2 - (P_0 + z_0 + h)\,z + h z_0 = 0.$$

Нужен корень, при котором $z = 0$ при $h = 0$ (меньший):

$$z(t) = \frac{P_0 + z_0 + vt}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + z_0 + vt)^2}{4} - vt\,z_0}.$$

График участка $0 \dots t_1$ — плавная кривая от 0 до 1,17 м на рисунке ниже (первый участок).

1.5. Момент открытия клапана. Из $h_1 = vt_1$:

$$t_1 = \frac{h_1}{v} = \frac{3{,}17}{2{,}0} \approx 1{,}58 \text{ с}, \qquad h_1 = 3{,}17 \text{ м}, \quad z_1 = 1{,}17 \text{ м}, \quad P_1 = 12 \text{ м}.$$

1.6. Остальные узловые точки.

Участок 1–2, клапан открыт (выход воздуха). Давление не меняется:

$P = P_0 + \delta P = 12$ м. По 1.1 $z = h - \delta P$, значит, z растёт вместе с h с той же скоростью. В точке 2 ($t_2 = T/4 = 2{,}5$ с): $h_2 = A = 5$ м, $z_2 = 3$ м, $P_2 = 12$ м; воздушный столб $z_0 - z_2 = 4$ м.

Участок 2–3, клапан закрыт. Вода снаружи опускается, давление в цилиндре падает, и клапан сразу закрывается. Воздуха в цилиндре — столько, сколько в точке 2, поэтому по закону Бойля — Мариотта $P(z_0 - z) = 12 \cdot 4 = 48$ (м.в.с.)·м. Клапан откроется внутрь, когда $P = P_0 - \delta P = 8$ м:

$$z_0 - z_3 = \frac{48}{8} = 6 \text{ м} \;\Rightarrow\; z_3 = 1{,}0 \text{ м},$$

$$h_3 = z_3 + (P_3 - P_0) = 1 - 2 = -1{,}0 \text{ м}.$$

Уровень снаружи опустился с 5 до -1 м, на 6 м: $t_3 = t_2 + \dfrac{6}{v} = 5{,}5$ с.

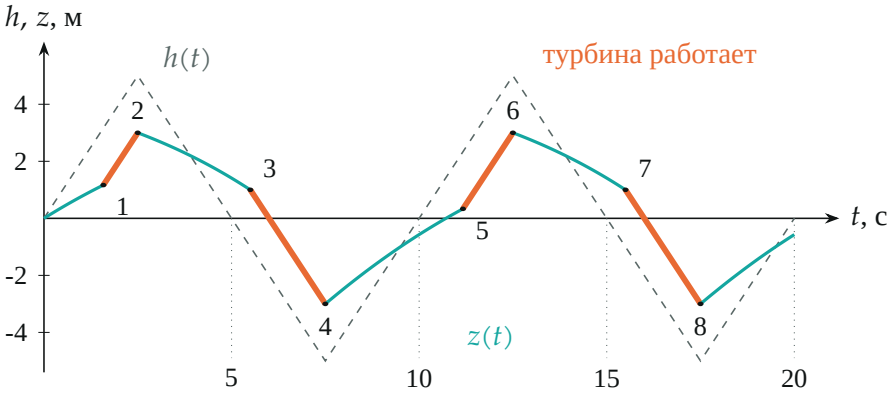
Участок 3–4, клапан открыт (всасывание). Давление постоянно $P = 8$ м, $z = h + \delta P$ (из 1.1: $z = h + P_0 - P = h + 2$). В точке 4 ($t_4 = 3T/4 = 7{,}5$ с): $h_4 = -5$ м, $z_4 = -3$ м, $P_4 = 8$ м, воздушный столб $z_0 - z_4 = 10$ м.

Участок 4–5, клапан закрыт. Вода снаружи поднимается, воздух сжимается: $P(z_0 - z) = 8 \cdot 10 = 80$. Клапан откроется наружу при $P = 12$ м:

$$z_0 - z_5 = \frac{80}{12} = 6{,}67 \text{ м} \;\Rightarrow\; z_5 = 0{,}33 \text{ м}, \qquad h_5 = z_5 + \delta P = 2{,}33 \text{ м},$$

$$t_5 = t_4 + \frac{A + h_5}{v} = 7{,}5 + 3{,}67 = 11{,}2 \text{ с}.$$

Дальше всё повторяется: точка 6 совпадает с 2 (сдвиг на T), 7 — с 3, 8 — с 4. Проверка закона Бойля для участка 2–3: $12 \cdot 4 = 48$ и $8 \cdot 6 = 48$.

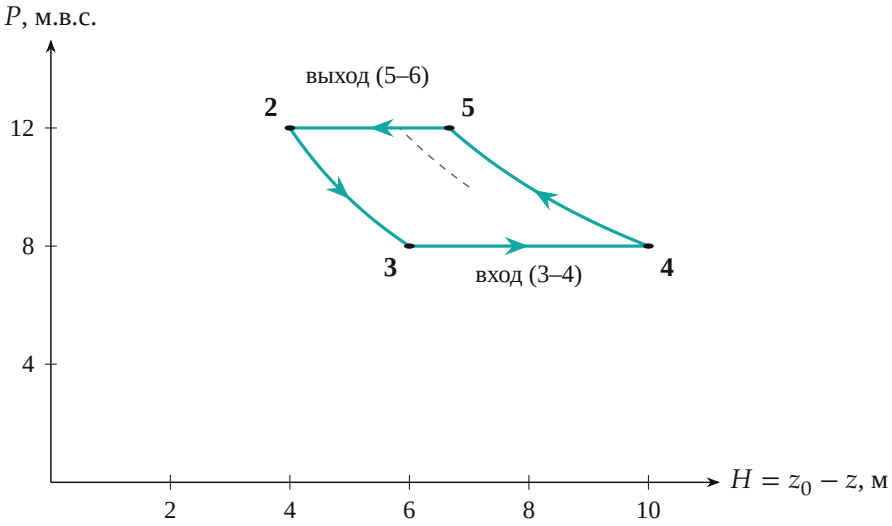


Уровень воды в цилиндре $z(t)$ (бирюзовая) и снаружи $h(t)$ (штрих); оранжевым — участки, где клапан открыт. Числа — узловые точки.

Результаты:

точка	t, с	h, м	z, м	P, м.в.с.
0	0	0	0	10
1	1,58	3,17	1,17	12
2	2,5	5,0	3,0	12
3	5,5	−1,0	1,0	8
4	7,5	−5,0	−3,0	8
5	11,2	2,33	0,33	12
6	12,5	5,0	3,0	12
7	15,5	−1,0	1,0	8
8	17,5	−5,0	−3,0	8

1.7. Диаграмма в координатах $(P, z_0 - z)$**.** Откладываем по горизонтали высоту воздушного столба $H = z_0 - z$ (она пропорциональна объёму), по вертикали — давление. Участки с закрытым клапаном — гиперболы $PH = \text{const}$ (изотермы), с открытым клапаном — горизонтали ($P = \text{const}$).



Рабочий цикл $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 (= 2)$*; серый пунктир — пуск (участки 0–1–2) до выхода на цикл.*

1.8. После пуска (участок 0–1–2) процесс повторяется, начиная с точки 2: цикл $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$, и точка 6 совпадает с точкой 2 (конец цикла — точка 5, после неё воздух выталкивается при постоянном давлении 12 м до возврата в состояние 2).

Проверка. Воздух за цикл должен вернуться в то же состояние. Количество воздуха пропорционально PH: в точке 2 оно равно $12 \cdot 4 = 48$, в точке 4 — $8 \cdot 10 = 80$. Вошло на участке 3–4: $8\,(10 - 6) = 32$, вышло на участке 5–6: $12\,(6{,}67 - 4) = 32$ — совпало. Предел: при $\delta P \to 0$ получаем $A_{\min} \to 0$, как и должно быть для установки без клапана.

Часть 2. Энергетические характеристики ВЭС.

Что происходит. В установившемся режиме электроэнергию вырабатывает воздух, проходящий через турбину в любую сторону. Работа за цикл — это перепад давления δP, умноженный на объём воздуха, прошедшего через турбину.

2.1. Участки с открытым клапаном: 3–4 (воздух всасывается) и 5–6 (воздух выталкивается). На участке 2–3 и 4–5 клапан закрыт и тока нет.

2.2. Масса воздуха за цикл. Воздух выходит на участке 5–6 при постоянном давлении $P = 12$ м.в.с. $= 1{,}2 \cdot 10^5$ Па. Объём, на который

уменьшился воздух в цилиндре:

$$\Delta V = S_0\,(z_6 - z_5) = 10 \cdot \left(3 - \frac{1}{3}\right) = 26{,}7\ \text{м}^3.$$

Уравнение состояния идеального газа $P\Delta V = \dfrac{\Delta m}{M} RT$, $T = 280$ К:

$$\Delta m = \frac{MP\,\Delta V}{RT} = \frac{0{,}029 \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 \cdot 26{,}7}{8{,}31 \cdot 280} \approx 40\ \text{кг}.$$

2.3. Кинетическая энергия. Давления в цилиндре и в трубе одинаковы, значит, плотность воздуха одна, и объёмный расход одинаков: за малое время Δt из цилиндра уходит объём $S_0 v\,\Delta t$ (вода поднимается со скоростью v — на участке 5–6 $z = h - \delta P$), а проходит через трубу $s v_1 \Delta t$:

$$S_0 v = s v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{S_0}{s} v = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Вся масса Δm проходит с этой скоростью:

$$E_{\text{кин}} = \frac{\Delta m\, v_1^2}{2} = \frac{40 \cdot 20^2}{2} \approx 8 \cdot 10^3\ \text{Дж} = 8\ \text{кДж}.$$

Это около 1,5 % от работы над турбиной за тот же участок ($5{,}3 \cdot 10^5$ Дж), так что скорость воздуха на выходе почти не влияет на энергетику.

2.4. Работа над турбиной. На турбину действует разность давлений δP (по условию 3 она постоянна), и воздух объёма ΔV проходит через неё:

$$A_{5-6} = \delta P\,\Delta V = 2{,}0 \cdot 10^4 \cdot 26{,}7 \approx 5{,}3 \cdot 10^5\ \text{Дж}.$$

2.5. Средняя мощность. За цикл есть ещё и работа при всасывании на участке 3–4. Там объём воздуха в цилиндре увеличился от $H_3 = 6$ м до $H_4 = 10$ м при $P = 8$ м.в.с.:

$$A_{3-4} = \delta P\, S_0\,(z_3 - z_4) = 2{,}0 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 4 = 8{,}0 \cdot 10^5\ \text{Дж}.$$

(Масса втекшего воздуха та же: $0{,}029 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 40/(8{,}31 \cdot 280) \approx 40$ кг.)

С учётом КПД и периода $T = 10$ с:

$$N = \frac{\eta_0\,(A_{3-4} + A_{5-6})}{T} = \frac{0{,}60 \cdot (8{,}0 + 5{,}3) \cdot 10^5}{10} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 80 \text{ кВт}.$$

Обратите внимание: ответы по пунктам 1.6 и 2.2–2.5 расходятся с официальным решением (там в $2 \to 3$ в закон Бойля подставлен не воздушный столб 4 м, а уровень воды 3 м, и потеряно сечение S_0 при расчёте массы).

Проверка. Размерность: $\delta P \Delta V$ — паскаль на кубометр, то есть джоуль. Мощность 80 кВт — разумный порядок для такой установки: полезная работа $\delta P \Delta V \sim 10^6$ Дж за цикл в 10 с.

Ответ. 1.1) $P = P_0 + h - z$; 1.2) $A_{\min} \approx 3{,}2$ м; 1.3) $v = 4A/T = 2{,}0$ м/с; 1.5) $t_1 \approx 1{,}58$ с, $h_1 \approx 3{,}17$ м, $z_1 \approx 1{,}17$ м, $P_1 = 12$ м; 1.6) см. таблицу (точка 3: $t_3 = 5{,}5$ с, $h_3 = -1{,}0$ м, $z_3 = 1{,}0$ м, $P_3 = 8$ м; точка 5: 11,2 с, 2,33 м, 0,33 м, 12 м); 1.8) цикл $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 (= 2)$; 2.1) на участках 3–4 и 5–6; 2.2) $\Delta m \approx 40$ кг; 2.3) $E_{\text{кин}} \approx 8$ кДж; 2.4) $A_{5-6} \approx 5{,}3 \cdot 10^5$ Дж; 2.5) $N \approx 80$ кВт.