

## Неидеальный конденсатор

**Задача 1.** [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 11 класс, экспериментальный тур, задача

1] **Неидеальный конденсатор.**

— В мире нет ничего идеального! — А как же шар и куб? — Шар неустойчив, а куб плохо катается! (Диалог математика и физика)

В данном задании вам необходимо экспериментально исследовать непривычные для Вас свойства реального конденсатора.

**Оборудование:** электролитический конденсатор ёмкости  $C \approx 50$  мкФ, постоянный резистор с сопротивлением  $R_0 \approx 2$  МОм, мультиметр цифровой, элемент питания 1,5 В, выключатель, соединительные провода.

**Теоретическое введение.** При разрядке конденсатора через постоянный резистор  $R$  напряжение на нём изменяется по закону

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad (1)$$

который можно представить в более удобном для анализа виде

$$\ln\left(\frac{U(t)}{U_0}\right) = -\frac{t}{RC}. \quad (2)$$

Если сопротивление резистора по каким-то причинам изменяется, то эти формулы не применимы. В этом случае следует пользоваться уравнением, справедливым на малых временах  $\Delta t$ :

$$\Delta U = -\frac{1}{RC} U \Delta t. \quad (3)$$

Из этого уравнения следует, что сопротивление цепи разрядки в заданном интервале можно приближённо рассчитать по формуле

$$R = -\frac{1}{C} \frac{\Delta t}{\Delta(\ln U)}. \quad (4)$$

Рекомендуем в расчётах использовать эту формулу.

## Часть 1. Подготовительная.

1.1 С помощью мультиметра измерьте сопротивление резистора  $R_0$  и ёмкость конденсатора  $C$  (для этого на лицевой панели есть специальные гнёзда подключения).

1.2 Используя элемент питания и резистор  $R_0$ , измерьте сопротивление мультиметра в режиме измерения напряжения в диапазоне 2 В. *Приведите электрическую схему, которую Вы использовали для этого, расчётные формулы и результаты измерений.*

Зарядите конденсатор, измерьте начальное напряжение  $U_0$  на нём, отключите конденсатор (используйте выключатель) от источника и мультиметра. Предоставьте ему возможность разряжаться в течение 5 минут. После этого опять подключите его к мультиметру и измерьте остаточное напряжение  $U_1$ .

1.3 По данным измерений рассчитайте среднее значение силы тока утечки и сопротивления утечки конденсатора  $R_{C1}$ . Измерения проводите при начальном напряжении  $U_0 = 1400$  мВ и начальном напряжении  $U_0 = 800$  мВ. Нарисуйте электрическую схему, использованную Вами.

*Подсказка. У вас нет возможности регулировать начальное напряжение на конденсаторе, поэтому полностью заряжайте его от элемента питания и ждите, пока он не разрядится через мультиметр. Для ускорения его разрядки можете использовать резистор  $R_0$ .*

**Часть 2. Разрядка конденсатора через мультиметр.** Зарядите конденсатор до максимального значения и подключите его к мультиметру.

2.1 Измерьте зависимость напряжения на конденсаторе от времени в диапазоне напряжений от 1400 мВ до 300 мВ с шагом 100 мВ (используйте секундомер с памятью 10 этапов).

2.2 Постройте график зависимости (2) по полученным данным измерений.

2.3 Строго (а не «на глаз») докажите, что закон экспоненциальной разрядки (1) в данном случае не выполняется — отклонения от него носят систематический характер.

2.4 Рассчитайте зависимость сопротивления конденсатора  $R_C$  от напряжения на нём. Постройте график полученной зависимости. Дайте ему качественное объяснение.

**Часть 3. Разрядка конденсатора через резистор.** Подключите к конденсатору и мультиметру параллельно резистор  $R_0$ .

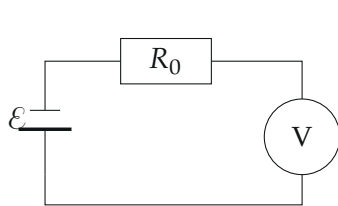
**3.1** Выполните все пункты Части 2 (2.1, 2.2 и 2.4) при разрядке через резистор.

**3.2** Сравните результаты, полученные в Части 2 и Части 3. Если обнаружены различия, дайте им качественное объяснение.

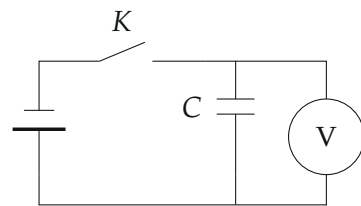
**3.3** Приведите эквивалентную схему реального конденсатора, объясняющую обнаруженные вами свойства конденсатора. Укажите параметры элементов этой схемы.

▲ **Решение. Что происходит.** Идеальный конденсатор разряжается через мультиметр экспоненциально:  $\ln U$  линейна по  $t$ . Реальный электролитический конденсатор отличается двумя вещами: утечкой тока через плёнку оксида (параллельное сопротивление, сильно зависящее от напряжения) и дополнительным сопротивлением в цепи выводов (последовательное). Мы измеряем *эффективное* сопротивление цепи разрядки  $R_{\text{эфф}} = -\frac{1}{C} \frac{\Delta t}{\Delta \ln U}$  на малых интервалах по формуле (4) и смотрим, как оно зависит от напряжения: у идеального конденсатора с мультиметром  $R_{\text{эфф}} = R_V$  при любом  $U$ .

**Обозначения и данные.** Ниже — данные эталонного прогона организаторов (напряжения даны с шагом 100 мВ). Данных Части 3 и некоторых напряжений в источнике нет; там, где результат получен расчётом по модели, это сказано явно.  $R_V$  — входное сопротивление мультиметра,  $R_p$  — параллельное сопротивление утечки конденсатора,  $R_s$  — последовательное сопротивление.



а)  $R_V = \frac{R_0 U_2}{\mathcal{E} - U_2}$



б) заряд, затем  $K$  разомкнуть

Схемы: а) измерение  $R_V$  (источник  $\mathcal{E}$ , резистор  $R_0$ , мультиметр  $V$ ); б) заряд конденсатора через выключатель  $K$  и разрядка через утечку. **Часть 1.**

**1.1.** Мультиметр в режимах  $R$  и  $C$  (специальные гнезда):  $R_0 = 2,04 \text{ МОм}$ ,  $C = 56,6 \text{ мкФ}$ . Ёмкость отличается от номинальных  $50 \text{ мкФ}$  почти на 13%, поэтому в расчётах дальше используем *измеренное*  $C$ .

**1.2.** Схема — на рисунке (а): элемент питания и мультиметр в режиме вольтметра (диапазон 2 В). Сначала меряем напряжение  $\mathcal{E}$  непосредственно на элементе, затем подключаем последовательно с вольтметром резистор  $R_0$  и снова читаем показание  $U_2$ . Ток один и тот же:

$$\frac{\mathcal{E} - U_2}{R_0} = \frac{U_2}{R_V}, \text{ откуда}$$

$$R_V = \frac{R_0 U_2}{\mathcal{E} - U_2}.$$

Обратите внимание:  $R_0$  должно быть сравнимо с  $R_V$ , иначе  $\mathcal{E} - U_2$  мало и измеряется с большой погрешностью; для  $R_0 = 2 \text{ МОм}$  и  $R_V \approx 10 \text{ МОм}$  показание падает на 17%, что хорошо измеряется. Эталонный результат:  $R_V = 10,0 \text{ МОм}$ .

**1.3.** Схема (б): зарядили конденсатор от элемента через выключатель  $K$  до  $U_0$ , разомкнули цепь (мультиметр на время отключён — он тоже разряжает конденсатор), через  $\Delta t = 5 \text{ мин}$  подключили мультиметр, прочитали  $U_1$ . За это время заряд ушёл только через утечку. Средний ток и сопротивление утечки:

$$\bar{I} = \frac{C(U_0 - U_1)}{\Delta t}, \quad R_{C1} = \frac{(U_0 + U_1)/2}{\bar{I}}.$$

Результаты эталонного прогона при  $C = 56,6 \text{ мкФ}$ ,  $\Delta t = 300 \text{ с}$ :

| $U_0, \text{ В}$ | $U_1, \text{ В}$ | $\bar{I}, \text{ А}$ | $R_{C1}, \text{ МОм}$ |
|------------------|------------------|----------------------|-----------------------|
| 1,40             | 1,32             | $1,5 \cdot 10^{-8}$  | 90                    |
| 1,00             | 0,98             | $3,8 \cdot 10^{-9}$  | 260                   |

Второй опыт в источнике записан при  $U_0 = 1,00 \text{ В}$ , а не  $0,8 \text{ В}$ , как в условии; расчёт выполнен для данных. Погрешность: напряжения записаны с шагом  $0,01 \text{ В}$ , значит  $U_0 - U_1 = 0,08 \pm 0,01 \text{ В}$  (12%) в первом опыте и

$0,02 \pm 0,01$  В (50%) во втором, то есть  $R_{C1} \approx 90 \pm 11$  и  $260 \pm 130$  МОм. Вывод: сопротивление утечки *не постоянно*: при меньшем напряжении утечка заметно слабее. Это уже не закон Ома.

## Часть 2.

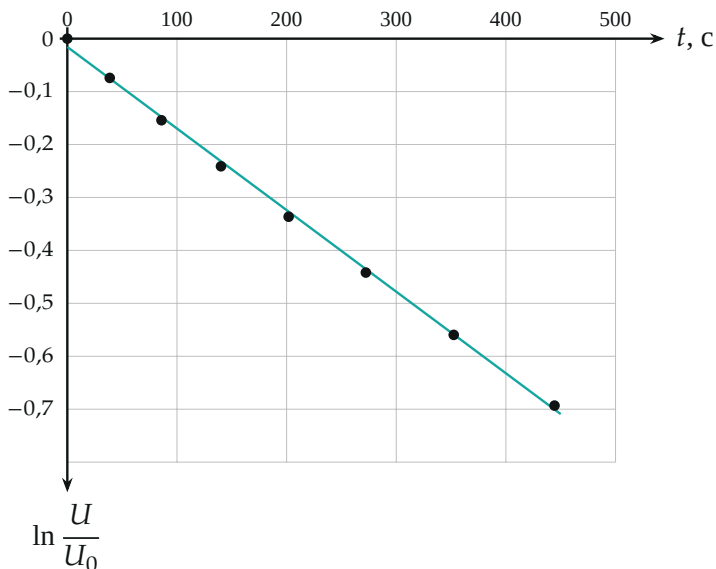
**2.1.** Конденсатор зарядили до 1400 мВ, подключили к мультиметру и записывали по секундомеру с памятью момент, когда показание проходило каждые 100 мВ. Данные и расчёт интервалов ( $\Delta \ln U = \ln \frac{U_{k-1}}{U_k}$ ,

$$\lambda = \Delta \ln U / \Delta t, R_{\text{эфф}} = \frac{1}{C\lambda} \text{ при } C = 56,6 \text{ мкФ):}$$

| $U$ , мВ | $t$ , с | $\Delta t$ , с | $\Delta \ln U$ | $\lambda$ , $10^{-3} \text{ с}^{-1}$ | $U_{\text{ср}}$ , мВ | $R_{\text{эфф}}$ , МОм |
|----------|---------|----------------|----------------|--------------------------------------|----------------------|------------------------|
| 1400     | 0       |                |                |                                      |                      |                        |
| 1300     | 38,70   | 38,70          | 0,0741         | 1,915                                | 1350                 | 9,23                   |
| 1200     | 85,84   | 47,14          | 0,0800         | 1,698                                | 1250                 | 10,41                  |
| 1100     | 140,13  | 54,29          | 0,0870         | 1,603                                | 1150                 | 11,02                  |
| 1000     | 201,85  | 61,72          | 0,0953         | 1,544                                | 1050                 | 11,44                  |
| 900      | 272,30  | 70,45          | 0,1054         | 1,496                                | 950                  | 11,81                  |
| 800      | 352,40  | 80,10          | 0,1178         | 1,470                                | 850                  | 12,02                  |
| 700      | 444,34  | 91,94          | 0,1335         | 1,452                                | 750                  | 12,16                  |

Источник даёт точки только до 700 мВ; опыт нужно продолжить до 300 мВ по условию — продолжение выполняется так же.

**2.2.** График зависимости (2): точки  $(t, \ln(U/U_0))$  и прямая метода наименьших квадратов  $\ln \frac{U}{U_0} = -1,547 \cdot 10^{-3} t - 0,0157$ .



Точки  $\ln(U/U_0)$  и прямая наименьших квадратов: точки идут дугой вокруг прямой. **2.3.** Если закон (1) выполняется, то все точки лежат на одной прямой с разбросом только от погрешностей измерений. Оценим эти погрешности: показание мультиметра —  $\pm 1$  мВ, время по секундомеру —  $\pm 0,3$  с (реакция). Тогда  $\sigma_{\ln U} \approx \frac{1}{1400} \approx 7 \cdot 10^{-4}$ , а относительная погрешность скорости убывания  $\lambda$  на интервале  $\approx 1,5\%$ . Два независимых критерия.

**Критерий 1: постоянство  $\lambda$ .** При экспоненте  $\lambda = 1/(RC)$  одинакова во всех интервалах. Из таблицы  $\lambda$  изменилась с 1,915 до 1,452 (на 24%) и монотонно убывает на всех семи интервалах; разброс в 10 раз превышает погрешность 1,5%. Закон (1) отвергается.

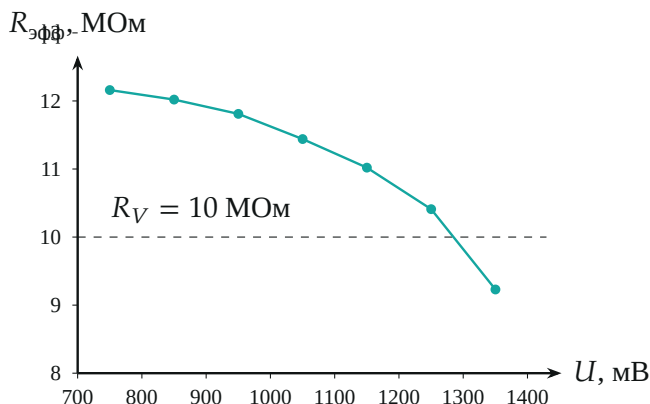
**Критерий 2: остатки регрессии.** Отклонения точек от прямой наименьших квадратов (в единицах  $\ln U$ ), в порядке возрастания  $t$ :

+0,0157; +0,0014; -0,0057; -0,0087; -0,0086; -0,0050; +0,0011; +0,0098.

Среднеквадратичное отклонение  $\approx 0,0096$  — в  $\approx 14$  раз больше  $\sigma_{\ln U}$ , а знаки идут серией плюс — минус — плюс: точки лежат дугой (выпуклость), не случайно. Решающий довод — величина остатков:  $\chi^2 \approx$

$\frac{8 \cdot (0,0096)^2}{(7 \cdot 10^{-4})^2} \approx 10^3$  при шести степенях свободы (8 точек, 2 параметра), тогда как для верной гипотезы  $\chi^2 \approx 6$ . Закон (1) отвергается на любом разумном уровне значимости.

**2.4.** На каждом интервале  $R_{\text{эфф}}$  из последнего столбца таблицы. Это не  $R_V$ : он равен 10 МОм, а  $R_{\text{эфф}}$  меняется от 9,2 до 12,2 МОм.



Эффективное сопротивление  $R_{\text{эфф}}$  на интервалах напряжения. Пунктир —  $R_V$ . Для идеального конденсатора график — горизонтальная прямая на уровне  $R_V$ ; здесь график пересекает эту прямую около  $U \approx 1,3 \text{ В}$ : выше — меньше  $R_V$ , ниже — больше, и дальше насыщается около 12,2 МОм. Объяснение. Выше 1,3 В разрядке помогает ток утечки через оксидную плёнку: он параллелен мультиметру и уменьшает эффективное сопротивление цепи ( $R_{\text{эфф}} < R_V$ ); по Части 1,  $R_{C1} \approx 90 \text{ МОм}$  при 1,4 В и резко растёт при уменьшении напряжения. При уменьшении  $U$  утечка слабеет и перестаёт влиять, а в цепи остаётся то, что делает  $R_{\text{эфф}}$  больше  $R_V$ : последовательное с ёмкостью сопротивление  $R_s$  (с ним мультиметр видит лишь часть напряжения конденсатора, и общая постоянная времени равна  $(R_V + R_s)C$ ). Поэтому «сопротивление конденсатора»  $R_C = R_{\text{эфф}} - R_V$  растёт по мере разрядки и меняет знак.

**Часть 3.** Данных Части 3 в источнике нет. Ниже — метод и результат, который даёт найденная в Частях 1–2 модель; цифры — прогноз по модели, а не измерения.

**3.1.** Выполняем все шаги Части 2 с тем же конденсатором, но с резистором  $R_0$  параллельно мультиметру:  $R_{\parallel} = \frac{R_0 R_V}{R_0 + R_V} = 1,69 \text{ МОм}$ , постоянная времени идеального конденсатора  $R_{\parallel} C \approx 96 \text{ с}$  вместо 566 с. Модель (рис. ниже) для интервала с напряжением  $U$ :

$$\frac{1}{R_{\text{эфф}}} = \frac{1}{R_p(U)} + \frac{1}{R_s + R_{\parallel}}.$$

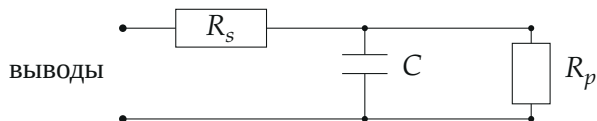
В Части 2 сопротивление утечки считаем по Части 1:  $R_p(U) \approx 90 \left( \frac{1360}{U} \right)^{3,4} \text{ МОм}$  (степень найдена по двум точкам опыта 1.3, 90 МОм при 1,36 В и 260 МОм при 0,99 В; это грубая интерполяция). Тогда  $R_s$  из данных Части 2:

|                             |      |      |      |      |     |     |     |
|-----------------------------|------|------|------|------|-----|-----|-----|
| $U_{\text{ср}}, \text{ мВ}$ | 1350 | 1250 | 1150 | 1050 | 950 | 850 | 750 |
| $R_p, \text{ МОм}$          | 92   | 119  | 158  | 215  | 300 | 437 | 665 |
| $R_s, \text{ МОм}$          | 0,25 | 1,4  | 1,85 | 2,1  | 2,3 | 2,4 | 2,4 |

Ожидание для Части 3: утечка ( $R_p \geq 90 \text{ МОм}$ ) мала рядом с  $R_{\parallel} + R_s \approx 2\text{--}4 \text{ МОм}$ , так что  $R_{\text{эфф}} \approx R_{\parallel} + R_s$ : от 1,9 до 4,1 МОм (при  $U$  от 1350 до 750 мВ); время прохода интервалов по 100 мВ по  $\Delta t = R_{\text{эфф}} C \Delta \ln U$ : 8; 14; 17,5; 20; 24; 27; 31 с вместо 39–92 с в Части 2.

**3.2.** Различия по сравнению с Частью 2: разрядка идёт в несколько раз быстрее;  $R_{\text{эфф}}$  меньше. Главное, что вычисленное *превышение*  $R_{\text{эфф}} - R_{\parallel}$  в Части 3 равно  $R_s \approx 0,3\text{--}2,4 \text{ МОм}$  и совпадает с  $R_{\text{эфф}} - R_V$  в Части 2 при низких  $U$  (где утечка не влияет): последовательное сопротивление — свойство самого конденсатора и не зависит от нагрузки. Утечка же заметна только при малой нагрузке (в Части 2); при  $R_0$  она шунтирует цепь слабо, график  $R_{\text{эфф}}(U)$  в Части 3 не пересекает уровень  $R_{\parallel}$ .

**3.3.** Эквивалентная схема: конденсатор  $C = 56,6 \text{ мкФ}$  с параллельным сопротивлением утечки  $R_p$  (нелинейным:  $\approx 90 \text{ МОм}$  при 1,4 В, около 300 МОм при 0,95 В), последовательно с ним  $R_s \approx 2,4 \text{ МОм}$  (для  $U \lesssim 1 \text{ В}$ , при больших  $U$  эффект меньше).



Эквивалентная схема реального конденсатора:  $R_s$  последовательно,  $R_p$  параллельно  $C$ . **Проверка.** Размерность:  $\frac{\Delta t}{C \Delta \ln U} = \frac{c}{\Phi} = \text{Ом}$ . Предел: при  $R_s \rightarrow 0$ ,  $R_p \rightarrow \infty$  получаем  $R_{\text{эфф}} = R_V$  — идеальный конденсатор,  $\lambda = \text{const}$ . Согласованность:  $R_p \approx 120 \text{ МОм}$  (из первого интервала Части 2 при  $R_s \rightarrow 0$ :  $\frac{1}{9,23} - \frac{1}{10} = \frac{1}{120}$ ) того же порядка, что и  $R_{C1} \approx 90 \text{ МОм}$  из Части 1 — независимые опыты дают согласованные значения утечки. Оговорка: в источнике  $R_C$  вычислено при номинальных  $C = 50 \text{ мкФ}$  (результат  $R_{\text{эфф}}$  завышен на 13%,  $R_C = R - R_V$  начинается с 0,44 МОм), а не при измеренных 56,6 мкФ; поэтому у организаторов не виден случай  $R_{\text{эфф}} < R_V$  при  $U > 1,3 \text{ В}$ .

Физический смысл: у реального электролитического конденсатора есть и «течь», и «лишнее» сопротивление в цепи; пока напряжение велико, преобладает утечка, потом — последовательное сопротивление.

**Ответ.** 1.1)  $R_0 = 2,04 \text{ МОм}$ ,  $C = 56,6 \text{ мкФ}$ ; 1.2)  $R_V = \frac{R_0 U_2}{\mathcal{E} - U_2} = 10,0 \text{ МОм}$ ; 1.3)  $\bar{I} \approx 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ А}$ ,  $R_{C1} \approx 90 \text{ МОм}$  ( $U_0 = 1,4 \text{ В}$ );  $\bar{I} \approx 3,8 \cdot 10^{-9} \text{ А}$ ,  $R_{C1} \approx 260 \text{ МОм}$  ( $U_0 = 1,0 \text{ В}$ ); 2.2) график на рисунке,  $\ln(U/U_0)$  не линейна по  $t$ ; 2.3)  $\lambda$  меняется на 24% при погрешности  $\approx 1,5\%$ , остатки закономерны; 2.4)  $R_{\text{эфф}}$  растёт от 9,2 до 12,2 МОм при убывании  $U$  от 1,35 до 0,75 В; 3.3) параллельное  $R_p$  (утечка) и последовательное  $R_s \approx 2 \text{ МОм}$ .