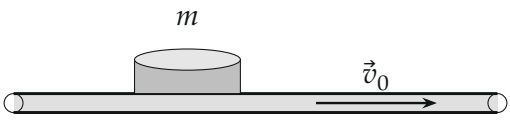
Потери энергии

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 11 класс, задача 1] **Потери энергии.**

Задача 1.1. Двигатель тянет горизонтальную ленту транспортёра с постоянной скоростью v_0, не зависящей от того, какой груз находится на ленте. На ленту кладут (без начальной скорости) массивный диск массы m. Коэффициент трения диска о ленту равен μ.



Диск на ленте: вид сбоку.

1.1 Найдите количество теплоты, которое выделится за время разгона диска до скорости ленты.

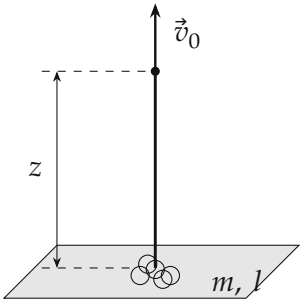
Задача 1.2. Жидкость прокачивают по горизонтальной трубе с постоянной скоростью v_0. Внутрь трубы попадает небольшой шарик массы m. Со стороны жидкости на шарик действует сила вязкого трения, пропорциональная относительной скорости движения шарика $\vec{F} = -\beta\vec{v}_{\text{отн.}}$. Силой вязкого трения жидкости о стенки трубы можно пренебречь.



Шарик в потоке жидкости.

1.2 Найдите количество теплоты, которое выделится за время разгона шарика до скорости жидкости.

Задача 1.3. На горизонтальной поверхности «кучкой» лежит гибкая цепочка. Длина цепочки равна l, её масса m. Цепочку начинают поднимать вертикально вверх за один из её концов с постоянной скоростью $\vec{v}_0$.



Цепочка, поднимаемая за конец.

1.3.1 Постройте график зависимости силы F, прикладываемой к цепочке, от высоты z поднятой части цепочки.

1.3.2 Рассчитайте количество теплоты, которое выделится в цепочке до отрыва цепочки от стола.

▲ **Решение. Что происходит.** Во всех трёх случаях тело (диск, шарик, звенья цепочки) вынуждают двигаться со скоростью v_0 силой, которая действует только пока есть относительное проскальзывание. Разгон происходит неупруго: часть работы двигателя уходит в тепло. Главная идея — считать работу внешней силы и вычитать из неё изменение механической энергии, а проверять ответ вторым способом: в системе отсчёта, где тело сначала движется, а потом останавливается.

Обозначения. m — масса диска (шарика, цепочки); v_0 — скорость ленты, жидкости, поднимаемого конца; A — работа внешней силы; Q — выделившаяся теплота. Диск и шарик в начале покоятся относительно ленты и жидкости соответственно.

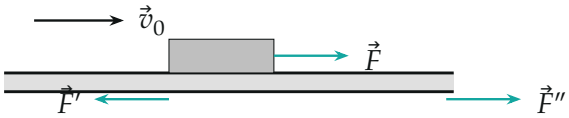
Пункт 1.1.

1. Движение диска. Пока диск проскальзывает, на него действует сила трения скольжения $F = \mu mg$, направленная вперёд, вдоль движения ленты. Второй закон Ньютона для диска в проекции на ось вдоль ленты даёт $a = F/m = \mu g$. Скорость диска растёт от нуля до v_0 за время

$$\tau = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu g}.$$

2. Что делает двигатель. По третьему закону Ньютона диск тянет ленту назад с той же силой F. Скорость ленты постоянна, значит, двига-

тель добавляет к силе тяги ровно F вперёд. За время τ лента проходит $x_2 = v_0\tau = v_0^2/(\mu g)$, диск — $x_1 = v_0\tau/2 = v_0^2/(2\mu g)$ (его скорость растёт линейно, поэтому путь равен средней скорости на время).



Силы: $\vec{F}$ — трение на диск, $\vec{F}'$ — на ленту, $\vec{F}'' = -\vec{F}'$ — добавка тяги двигателя.

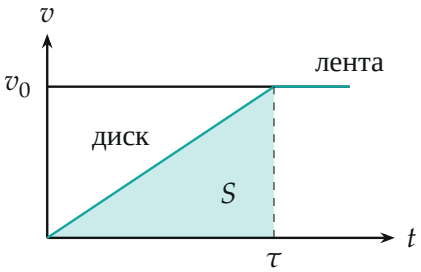
3. Энергия. Работа добавки тяги двигателя за время разгона

$$A = F''x_2 = \mu mg \cdot \frac{v_0^2}{\mu g} = mv_0^2.$$

Кинетическая энергия диска выросла на $\Delta E = \dfrac{mv_0^2}{2}$. Энергия сохраняется: $A = \Delta E + Q$, откуда

$$Q = mv_0^2 - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Теперь то же самое графически: теплота — работа силы трения на пути относительного скольжения $x_2 - x_1 = v_0\tau/2$, то есть $Q = F\,(x_2 - x_1) = \mu mg\,\dfrac{v_0^2}{2\mu g}$.



Скорости в лабораторной системе. Площадь $S = v_0\tau/2$ — путь проскальзывания диска по ленте.

Пункт 1.2.

4. Что известно о силе. Закон силы $\vec{F} = -\beta\vec{v}_{\text{отн.}}$ нам не понадобится: докажем результат для любой силы. Пусть v_1 — скорость шарика, $u = v_0 - v_1$ — его скорость относительно жидкости, F — сила на шарик вперёд. Жидкость течёт с постоянной скоростью, значит, к ней приложена внешняя сила, равная по модулю F и направленная вперёд (она компенсирует реакцию шарика).

5. Работы за малый промежуток dt**.** Работа силы на шарик: $dA_1 = Fv_1\,dt = m\dfrac{dv_1}{dt}\,v_1\,dt = mv_1\,dv_1$ (второй закон Ньютона). Суммируем от начала разгона до выравнивания скоростей:

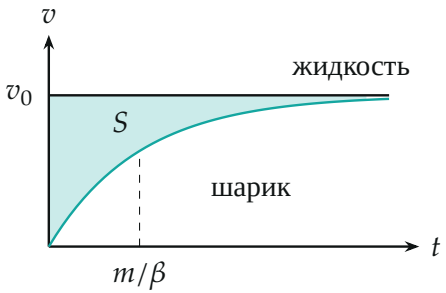
$$A_1 = \int_0^{v_0} mv_1\,dv_1 = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Работа внешней силы на жидкость, которая движется со скоростью v_0:

$$A_2 = \int Fv_0\,dt = \int mv_0\,dv_1 = mv_0^2.$$

Работа внешней силы вдвое больше приобретённой кинетической энергии шарика, и $Q = A_2 - A_1 = \dfrac{mv_0^2}{2}$.

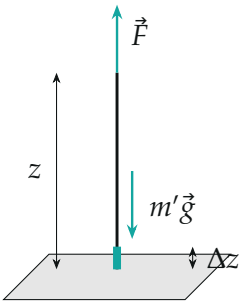
6. Второй способ. Жидкость движется равномерно, значит, её система отсчёта инерциальна. В ней шарик в начале имеет скорость v_0, единственная сила — вязкая, и в конце шарик останавливается. Вся кинетическая энергия $\dfrac{mv_0^2}{2}$ превратилась в тепло. Для конкретного закона $F = -\beta u$: $m\dot{u} = -\beta u$, $u = v_0e^{-\beta t/m}$, путь относительного скольжения $\int u\,dt = \dfrac{mv_0}{\beta}$, и $Q = \int \beta u^2\,dt = \dfrac{\beta v_0^2}{2}\cdot\dfrac{m}{\beta} = \dfrac{mv_0^2}{2}$.



Шарик разгоняется до v_0 асимптотически, площадь $S = mv_0/\beta$ — относительный путь.

Пункт 1.3.1.

7. Что тянет цепочку. Поднятая часть длины z движется с постоянной скоростью v_0, поэтому сумма сил на неё равна нулю. Это сила F вверх, вес поднятой части $m'g = \dfrac{m}{l}zg$ вниз и сила со стороны кучки на нижнее звено.



Бирюзовый кусочек Δz у стола за Δt разгоняется от нуля до v_0; $m' = mz/l$ — масса поднятой части.

8. Дополнительная сила. За малое время Δt поднимается новый кусочек длины $\Delta z = v_0\Delta t$ массы $\Delta m = \dfrac{m}{l}v_0\Delta t$: из покоя он должен стать движущимся со скоростью v_0. Для этого нужен импульс силы, то есть дополнительная сила

$$F' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{v_0\,\Delta m}{\Delta t} = \frac{m}{l}v_0^2.$$

Остальная цепочка движется равномерно. Условие равновесия поднятой части:

$$F = \frac{m}{l} zg + \frac{m}{l} v_0^2, \qquad 0 \le z \le l.$$

Зависимость линейная: при $z = 0$ имеем $F = \dfrac{mv_0^2}{l}$, при $z = l$ имеем $F = mg + \dfrac{mv_0^2}{l}$.

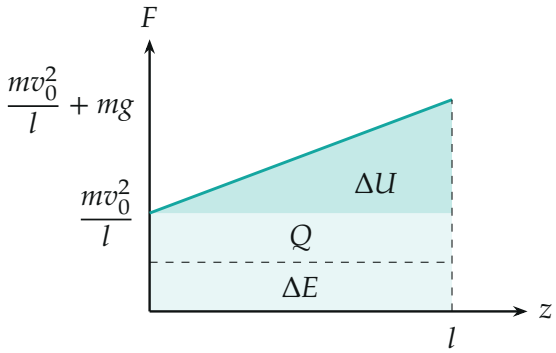


График $F(z)$. Площадь под ним — работа A: прямоугольник mv_0^2 (его нижняя половина идёт в кинетическую энергию ΔE, верхняя — в тепло Q) и треугольник $\Delta U = mgl/2$.

Пункт 1.3.2.

9. Баланс энергии. Работа силы F при подъёме на l равна площади под графиком:

$$A = \frac{mv_0^2}{l} \cdot l + \frac{1}{2} mgl = mv_0^2 + \frac{1}{2} mgl.$$

К моменту отрыва вся цепочка движется со скоростью v_0 и её центр масс поднялся на $l/2$: кинетическая энергия выросла на $\dfrac{mv_0^2}{2}$, потенциальная — на $\dfrac{mgl}{2}$. Закон сохранения энергии $A = \Delta E + \Delta U + Q$ даёт

$$Q = mv_0^2 + \frac{1}{2} mgl - \frac{mv_0^2}{2} - \frac{1}{2} mgl = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Обратите внимание: теплота в 1.3 не зависит ни от g, ни от l. Каждое звено цепочки отрывается от кучки рывком, как при абсолютно неупругом ударе с лентой, и теряет ровно $\dfrac{v_0^2}{2}\,dm$; суммируя по всем звеньям, получаем тот же результат — это второй способ.

Проверка. Размерность: $[mv_0^2] = \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж}$; в 1.3.1 $[mv_0^2/l] = \text{Н}$ и $[mg] = \text{Н}$. Во всех трёх случаях Q равна кинетической энергии $\dfrac{mv_0^2}{2}$ — той, которую имело бы тело в системе отсчёта, где оно сначала движется со скоростью v_0, а потом останавливается. Предел $\mu \to 0$ или $\beta \to 0$: разгон бесконечно долгий, но теплота не меняется — это нормально: она определяется только скоростью, но не величиной силы. Предел $v_0 \to 0$: сила $F \to mgz/l$ — статический вес поднятой части, $Q \to 0$.

Физический смысл: энергия, которая тратится на то, чтобы вынудить тело двигаться со скоростью v_0 неупругим способом, делится поровну между телом и теплотой.

Ответ. 1.1) $Q = \dfrac{mv_0^2}{2}$; 1.2) $Q = \dfrac{mv_0^2}{2}$; 1.3.1) $F = \dfrac{m}{l}\,(zg + v_0^2)$ при $0 \le z \le l$ (прямая, график на рисунке); 1.3.2) $Q = \dfrac{mv_0^2}{2}$.