Брызги шампанского!

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 11 класс, задача 3] **Брызги шампанского!**

Данные для этой задачи взяты из статьи Касьянов Г. И. Физическая абсорбция углекислого газа (https://krkgi.ru/glav/co2tech/index.htm).

Свойства газированных напитков (в том числе шампанских вин), во многом, определяются растворённым в них углекислым газом.

Растворимостью газа называется максимальное количество газа, которое может быть растворено в жидкости. Количество газа (может определяться массой, количеством молей, объёмом), растворённое в единице объёма жидкости, называется концентрацией растворённого газа. Раствор, содержащий максимально возможное количество газа, называется насыщенным. Растворимость может измеряться в различных единицах: грамм/литр; моль/литр; литр/литр и т. д.

При не очень высоких давлениях растворимость газа описывается законом У. Генри: растворимость газа пропорциональна парциальному давлению газа над поверхностью жидкости:

$$C = kP, \tag{1}$$

где C — концентрация насыщенного раствора газа, P — парциальное давление растворяемого газа над поверхностью жидкости, k — постоянная Генри, зависящая от жидкости и растворяемого газа; также эта постоянная зависит от температуры.

Используйте следующие постоянные величины: универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К); 1 атм $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $T = t + 273$ (связь шкал Кельвина и Цельсия); атмосферное давление постоянно и равно $P_0 = 1{,}00$ атм $= 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; молярная масса углекислого газа CO_2 — $M = 44{,}0$ г/моль.

При решении данной задачи используются следующие приближения: углекислый газ в газовой фазе является идеальным; объём жидкого раствора не зависит от концентрации растворённого углекислого газа; давлением насыщенных паров воды можно пренебречь.

Часть 1. Предварительная. Для большей наглядности и упрощения численных расчётов в данной задаче рекомендуется использовать следующие единицы измерения: единица массы — 1 грамм; единица объёма — 1 литр; единица давления — 1 атмосфера. Назовём эту систему единиц **ГЛА**.

1.1 Найдите численное значение и размерность универсальной газовой постоянной R в указанной системе единиц.

При температуре $t_0 = 0{,}00\,^\circ\text{C}$ и парциальном давлении над поверхностью воды $P_0 = 1{,}00$ атм растворимость углекислого газа в воде равна $k_V = 1{,}71$ л/л (т. е. в 1 литре воды растворяется 1,71 литра углекислого газа, причём этот объём рассчитывается при указанных температуре и давлении газа). Далее будем измерять концентрацию в граммах/литр (масса газа в граммах, растворённого в 1 литре воды).

1.2 Запишите формулу для расчёта коэффициента k_m в законе Генри (1), если концентрация рассчитывается в г/л, а давление в атмосферах. Рассчитайте её численное значение.

Для получения сильно газированной воды её насыщают углекислым газом при давлении $P = 3{,}0$ атм и температуре $t = 0{,}0\,^\circ\text{C}$.

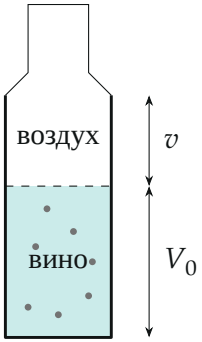
1.3 Рассчитайте массу углекислого газа, который содержится в двухлитровой бутылке $V = 2{,}0$ л сильно газированной воды.

Зависимость постоянной Генри $k_m(t)$ от температуры описывается формулой

$$k_m = \frac{k_0}{1 + \alpha t}, \tag{2}$$

где $k_0 = 3{,}4$ г/(л·атм), $\alpha = 5{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{K}^{-1}$ — постоянные величины, t — температура по шкале Цельсия.

Часть 2. Открываем бутылку! В стандартную бутылку заливают $V_0 = 0{,}75$ л винного купажа (вино, не содержащее углекислого газа) температуры $t_0 = 20\,^\circ\text{C}$ и плотно запечатывают бутылку. При этом в бутылке остаётся объём $v = 0{,}15$ л, заполненный воздухом (содержанием углекислого газа в нём можно пренебречь), находящимся при атмосферном давлении. После этого бутылки опускают в подвал для вызревания. Согласно справочным данным, в каждой бутылке в результате брожения образуется $m_0 = 7{,}5$ г углекислого газа.



Запечатанная бутылка: объём вина V_0, воздушный объём v. Точки в вине — растворённый CO_2.

2.1 Найдите зависимость давления в бутылке от её температуры в диапазоне от 0 °C до 30 °C. Постройте график полученной зависимости.

В Листах ответов приведите формулы, по которым вы проводили расчёты. Результаты расчётов (в т. ч. промежуточных) приведите в Таблице 1, график постройте на приготовленном для Вас бланке. Допускается проведение промежуточных численных расчётов.

Неопытный молодой человек открывает бутылку с шампанским при её температуре, равной $t = 25\,°C$. При этом пробка выскакивает из бутылки, и шампанское струёй начинает вылетать из бутылки.

2.2 Рассчитайте, какой объём шампанского останется в бутылке после такого «эксперимента».

Считайте, что при выскакивании пробки давление в бутылке резко падает до атмосферного, а углекислый газ очень быстро выделяется в виде пузырьков равномерно по всему объёму, до тех пор пока вино не станет насыщенным при комнатных условиях.

▲ **Решение. Что происходит.** Часть 1 — перевод единиц и закон Генри: концентрация растворённого газа пропорциональна его давлению над жидкостью. В бутылке газ CO_2 делится на две порции: растворённая в вине (по закону Генри) и свободная над вином. Их сумма постоянна и равна m_0. Это уравнение баланса массы вместе с уравнением состояния свободной порции определяет давление CO_2 при каждой температуре. Главная идея 2.2 — после открытия вся пена, образовавшаяся при выделении газа, занимает объём, во много раз больший бутылки, и в бутылке

остаётся та её доля, которая равна отношению объёма бутылки к объёму пены.

Обозначения. Единицы ГЛА: грамм, литр, атмосфера. $P_г$ — парциальное давление CO_2 над вином, $P_в$ — парциальное давление воздуха, $P = P_г + P_в$ — давление в бутылке (закон Дальтона).

Часть 1.

1.1. Из уравнения Менделеева — Клапейрона $R = \dfrac{PV}{\nu T}$, подставим единицы СИ и переведём: $1\ \text{Па}\cdot\text{м}^3 = \dfrac{1}{1{,}01\cdot 10^5}\ \text{атм}\cdot 10^3\ \text{л}$. Тогда

$$R = \frac{8{,}31}{1{,}01\cdot 10^5}\cdot 10^3\ \frac{\text{атм}\cdot\text{л}}{\text{моль}\cdot\text{К}} \approx 8{,}23\cdot 10^{-2}\ \frac{\text{атм}\cdot\text{л}}{\text{моль}\cdot\text{К}}.$$

1.2. При $0\,^\circ$C и 1 атм в одном литре воды растворено $k_V = 1{,}71$ л газа. Масса этого газа из уравнения состояния $PV = \dfrac{m}{M}RT$ при $P = 1$ атм, $T = 273$ К:

$$m = \frac{M P_0 k_V}{RT} = \frac{44{,}0\cdot 1\cdot 1{,}71}{0{,}0823\cdot 273} \approx 3{,}35\ \text{г}.$$

По закону Генри $C = k_m P$ эта масса в одном литре отвечает давлению 1 атм, поэтому

$$k_m = \frac{M k_V}{RT} \approx 3{,}35\ \frac{\text{г}}{\text{л}\cdot\text{атм}}.$$

Это почти то же, что $k_0 = 3{,}4$ в формуле (2) при $t = 0$: данные согласованы.

1.3. Концентрация насыщенного раствора при $P = 3$ атм: $C = k_m P \approx 10$ г/л. В бутылке объёмом 2,0 л растворено

$$m = CV = 3{,}35\cdot 3{,}0\cdot 2{,}0 \approx 20\ \text{г}.$$

Часть 2.

2.1. Баланс. Свободный объём над вином v не меняется (объём вина считаем постоянным). Воздух: его количество не меняется с момента

закупорки при $T_0 = 293$ К и $P_0 = 1$ атм, объём тот же, значит (изохора)

$$P_{\text{в}} = P_0 \frac{T}{T_0} = \frac{273 + t}{293} \text{ атм.}$$

CO_2: общая масса m_0 делится на растворённую $k_m P_{\text{г}} V_0$ (закон Генри для V_0 литров вина) и свободную, которая в объёме v при температуре T создаёт давление $P_{\text{г}}$:

$$P_{\text{г}} v = \frac{m_0 - k_m P_{\text{г}} V_0}{M} RT.$$

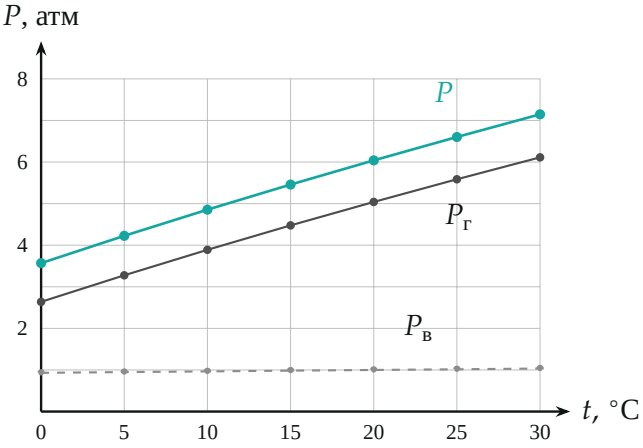
Это линейное уравнение для $P_{\text{г}}$. Введём $\widetilde{P} = \dfrac{m_0 RT}{Mv}$ — давление, которое было бы, если бы весь газ был свободным, и $C_0 = \dfrac{m_0}{V_0} = 10$ г/л. Тогда $P_{\text{г}} = \widetilde{P}\left(1 - \dfrac{k_m P_{\text{г}}}{C_0}\right)$, откуда

$$P_{\text{г}} = \frac{\widetilde{P}}{1 + \dfrac{k_m(t)}{C_0}\widetilde{P}}, \qquad k_m(t) = \frac{k_0}{1 + \alpha t}.$$

Здесь $\widetilde{P} = \widetilde{P}(0\,^\circ\text{C}) \cdot \dfrac{273 + t}{273}$, где $\widetilde{P}(0\,^\circ\text{C}) = \dfrac{m_0 R \cdot 273}{Mv} \approx 25{,}5$ атм. Полное давление $P = P_{\text{в}} + P_{\text{г}}$.

Расчёт. Порядок: $k_m(t)$, затем $\widetilde{P}$, затем $P_{\text{г}}$, затем $P_{\text{в}}$ и сумма.

t, °C	k_m, г/(л·атм)	$\widetilde{P}$, атм	$P_{\text{г}}$, атм	$P_{\text{в}}$, атм	P, атм
0	3,40	25,5	2,64	0,93	3,57
5	2,67	26,0	3,28	0,95	4,23
10	2,19	26,5	3,89	0,97	4,85
15	1,86	26,9	4,48	0,98	5,46
20	1,62	27,4	5,04	1,00	6,04
25	1,43	27,9	5,59	1,02	6,60
30	1,28	28,3	6,11	1,03	7,15



Давление в бутылке: $P_в$ — воздух (пунктир), $P_г$ — CO_2, P — сумма.

2.2. Сначала найдём, сколько CO_2 останется растворённым после открытия. Вино при 25 °C насыщается до давления $P_0 = 1$ атм:

$$k_m(25\,^\circ\text{C}) = \frac{3{,}4}{1 + 0{,}055 \cdot 25} \approx 1{,}43\ \frac{\text{г}}{\text{л} \cdot \text{атм}}, \qquad m_1 = k_m P_0 V_0 \approx 1{,}07\ \text{г}.$$

Остальной газ превращается в пузырьки: $m = m_0 - m_1 = 6{,}43$ г. Их объём при 1 атм и $T = 298$ К:

$$V_1 = \frac{mRT}{MP_0} = \frac{6{,}43 \cdot 0{,}0823 \cdot 298}{44{,}0 \cdot 1} \approx 3{,}58\ \text{л}.$$

Пена — смесь вина (0,75 л) и пузырьков — занимает $V = V_0 + V_1 \approx 4{,}33$ л. Бутылка вмещает $V_0 + v = 0{,}90$ л. Пена однородна, поэтому в бутылке остаётся доля

$$\eta = \frac{V_0 + v}{V} = \frac{0{,}90}{4{,}33} \approx 0{,}21,$$

а вина — $V_{\text{ост}} = \eta V_0 \approx 0{,}16$ л.

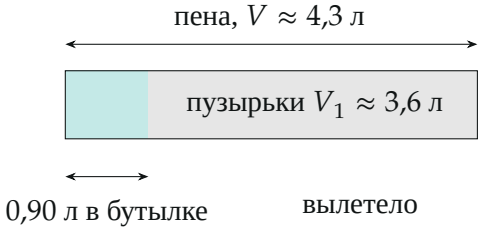


Схема 2.2 (без учёта воздуха): слева — часть пены, вмещающаяся в бутылку.

Обратите внимание: у организаторов не учтён воздух над вином (при открытии он тоже расширяется до 1 атм: при 25 °C его объём ≈ 0,15 л). С воздухом пена занимает 4,48 л, $\eta = 0{,}20$, и $V_{\text{ост}} \approx 0{,}15$ л. Ответ в обоих вариантах — примерно 0,15–0,16 л.

Проверка. Размерности: $[k_m] = \text{г}/(\text{л}\cdot\text{атм})$, $[k_m P] = \text{г/л}$ — концентрация; $[\widetilde{P}] = \dfrac{\text{г}\cdot\text{атм}\cdot\text{л}/(\text{моль}\cdot\text{K})\cdot\text{K}}{(\text{г/моль})\cdot\text{л}} = \text{атм}$. Пределы: при $k_m \to 0$ (газ не растворяется) $P_{\text{г}} \to \widetilde{P}$ — весь газ над вином; при большой $\widetilde{P}$ формула даёт $P_{\text{г}} \to C_0/k_m$ — весь газ растворён, это и есть предел: давление ограничивается растворимостью. Проверка по точке: при 20 °C $P_{\text{г}} = 5{,}04$ атм, растворено $k_m P_{\text{г}} V_0 = 1{,}62 \cdot 5{,}04 \cdot 0{,}75 \approx 6{,}1$ г, свободно $7{,}5 - 6{,}1 = 1{,}4$ г в 0,15 л: $P = \dfrac{1{,}4}{44} \cdot \dfrac{0{,}0823 \cdot 293}{0{,}15} \approx 5{,}1$ атм — совпало.

Физический смысл: давление в бутылке растёт с температурой быстрее, чем у идеального газа, потому что при нагревании газ ещё и выходит из раствора (k_m падает).

Ответ. 1.1) $R \approx 8{,}23 \cdot 10^{-2}$ атм·л/(моль·K); 1.2) $k_m = \dfrac{Mk_V}{RT} \approx 3{,}35$ г/(л·атм); 1.3) $m \approx 20$ г; 2.1) $P = \dfrac{273+t}{293} + \dfrac{\widetilde{P}}{1 + k_m\widetilde{P}/C_0}$; при $t = 0, 5, \ldots, 30$ °C: 3,6; 4,2; 4,9; 5,5; 6,0; 6,6; 7,2 атм; 2.2) $V_{\text{ост}} \approx 0{,}16$ л (с учётом воздуха ≈ 0,15 л).