Поговорим о средних

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 9 класс, задача 1]

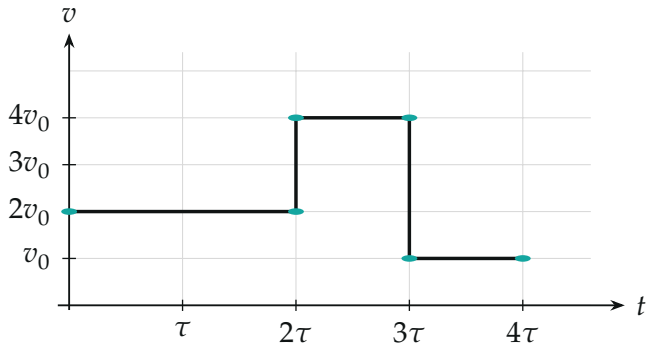
В различных разделах физики часто используется понятие «среднее значение физической величины». Однако это понятие не является однозначным, потому что «средние» могут быть разными: в каждом конкретном случае надо точно определять, о каком именно «среднем» идёт речь. В этом задании нужно продемонстрировать понимание этой проблемы.

Примечания. 1. Все числа, фигурирующие в условии задачи, считайте точными. 2. В решении допускается проведение промежуточных численных расчётов.

Задача 1.1. Средняя скорость.

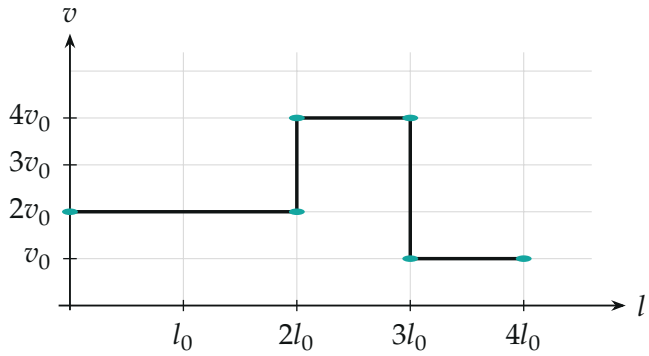
Определение. Тело движется с переменной скоростью $v(t)$ в течение промежутка времени t_0. Средней скоростью называется скорость равномерного движения $\langle v \rangle$, при которой за тот же промежуток времени t_0 тело проходит такое же расстояние, как и при движении с заданной переменной скоростью $v(t)$.

1.1.1 Автомобиль движется по прямой. На рисунке представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Величины τ и v_0 считайте известными. Найдите среднюю скорость точки за всё время движения 4τ.



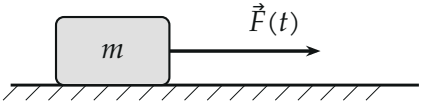
1.1.2 Автомобиль движется по прямой. На рисунке представлена зависимость скорости автомобиля от пройденного пути. Величины l_0 и

v_0 считайте известными. Найдите среднюю скорость точки на всём пути $4l_0$.



Задача 1.2. Средняя сила.

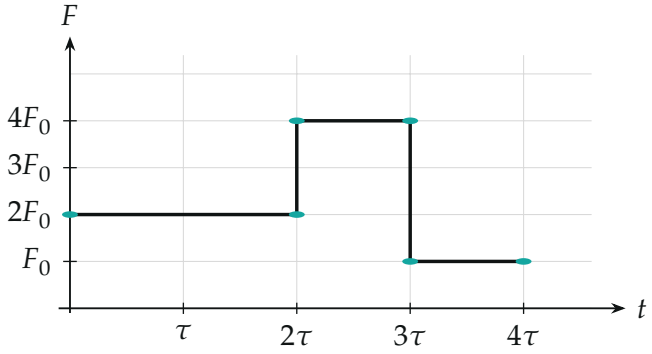
Пусть тело движется по прямой под действием переменной результирующей силы $F(t)$, направление которой совпадает с направлением вектора скорости тела.



Определение 1. «Средней импульсной» силой $\langle F \rangle_P$ назовём такую постоянную силу, которая сообщает телу такой же импульс, как и заданная переменная сила $F(t)$.

Определение 2. «Средней энергетической» силой $\langle F \rangle_E$ назовём такую постоянную силу, которая на всём участке пути совершает над телом такую же работу, как и переменная сила $F(t)$.

Тело массы m движется по прямой под действием переменной результирующей силы $F(t)$, направление которой совпадает с направлением вектора скорости тела. Зависимость модуля этой силы от времени показана на рисунке. Величины τ и F_0 считайте известными. В начальный момент времени $t = 0$ скорость тела равна v_0.



1.2.1 Рассчитайте, чему равна «средняя импульсная» сила, действующая на тело, за всё время движения 4τ.

1.2.2 Рассчитайте, чему равна «средняя энергетическая» сила, действующая на тело, за всё время движения 4τ.

1.2.3 Рассчитайте «среднюю энергетическую» силу при нулевой начальной скорости $v_0 = 0$.

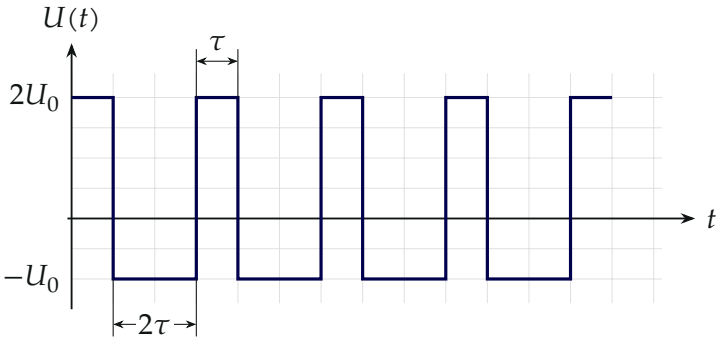
Задача 1.3. Средняя сила тока.

Через резистор, сопротивление которого постоянно и равно R, протекает электрический ток, сила которого зависит от времени $I(t)$.

Определение 1. «Средней зарядовой» силой тока $\langle I \rangle_q$ назовём силу постоянного тока, при которой заряд, протекающий через резистор за некоторый промежуток времени Δt, равен заряду, протекающему через резистор за тот же промежуток времени Δt при изменяющейся силе тока $I(t)$.

Определение 2. «Средней тепловой» силой тока $\langle I \rangle_Q$ назовём силу постоянного тока, при которой количество теплоты, выделяющейся на резисторе за промежуток времени Δt, равно количеству теплоты, выделяющейся на резисторе за тот же промежуток времени при изменяющейся силе тока $I(t)$.

Напряжение на постоянном резисторе, сопротивление которого равно R, изменяется по периодическому закону $U(t)$, график которого показан на рисунке. Величины τ и U_0 считайте известными.



1.3.1 Вычислите «среднюю зарядовую» силу тока за промежуток времени Δt, значительно превышающий τ.

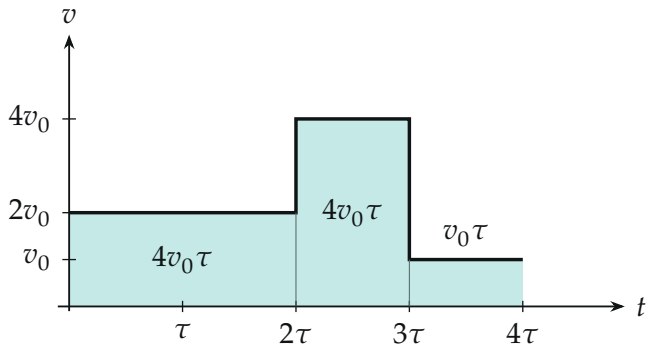
1.3.2 Вычислите «среднюю тепловую» силу тока за промежуток времени Δt, значительно превышающий τ.

▲ **Решение. Задача 1.1. Средняя скорость.**

Что происходит. Автомобиль едет с разными скоростями на разных участках. Средняя скорость по определению — это скорость воображаемого автомобиля, который проехал бы тот же путь S за то же время t_0 с одной постоянной скоростью: $\langle v\rangle = S/t_0$. Значит, в обоих пунктах нужно найти полный путь и полное время; одно из них задано графиком прямо, другое придётся считать.

Обозначения. S — весь пройденный путь; t_0 — всё время движения; Δt_k, l_k, v_k — время, путь и скорость на k-м участке (скорость на каждом участке постоянна, поэтому на участке $l_k = v_k\Delta t_k$).

Пункт 1.1.1. Задан график $v(t)$ и полное время $t_0 = 4\tau$. Путь на участке равен $v_k\Delta t_k$ — это площадь прямоугольника под графиком на этом участке (рисунок), весь путь — площадь под графиком.



Путь на каждом участке — площадь прямоугольника под графиком $v(t)$; на первом участке $2v_0 \cdot 2\tau = 4v_0\tau$.

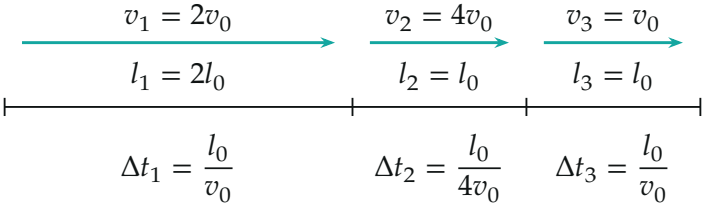
Складываем площади:

$$S = 2v_0 \cdot 2\tau + 4v_0 \cdot \tau + v_0 \cdot \tau = 9v_0\tau.$$

Средняя скорость по определению

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t_0} = \frac{9v_0\tau}{4\tau} = \frac{9}{4}v_0.$$

Пункт 1.1.2. Теперь известен путь $S = 4l_0$, а время неизвестно, и его надо считать. По графику $v(l)$ скорость постоянна на трёх участках: на первом путь $2l_0$ со скоростью $2v_0$, на втором l_0 со скоростью $4v_0$, на третьем l_0 со скоростью v_0. На каждом участке $\Delta t_k = l_k/v_k$.



Три участка пути: у каждого известны длина и скорость, значит, находится и время.

Общее время:

$$t_0 = \frac{2l_0}{2v_0} + \frac{l_0}{4v_0} + \frac{l_0}{v_0} = \frac{9}{4}\frac{l_0}{v_0}.$$

Средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t_0} = \frac{4l_0}{\frac{9}{4}\frac{l_0}{v_0}} = \frac{16}{9}v_0.$$

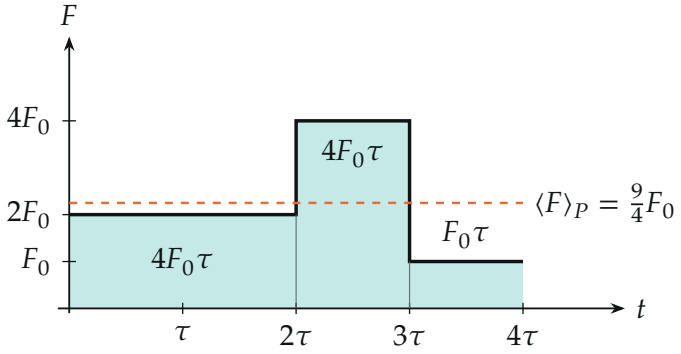
Обратите внимание. средняя скорость не равна среднему арифметическому скоростей. В пункте 1.1.1 на каждый участок скорость «тратила» разное время ($2\tau, \tau, \tau$), в пункте 1.1.2 — разные пути; поэтому из одного и того же графика-«лесенки» получились разные ответы, $\frac{9}{4}v_0$ и $\frac{16}{9}v_0$. Правило одно: весь путь делим на всё время.

Задача 1.2. Средняя сила.

Что происходит. Сила меняется ступенями, а «среднюю» можно определить двумя способами. Импульс силы $F\Delta t$ меняет импульс тела, а работа $F\Delta s$ меняет кинетическую энергию. Первое «среднее» сравнивает импульсы, второе — работы; поскольку сила действует то с большей, то с меньшей скоростью тела, эти два «средних» различаются.

Обозначения. $a_0 = F_0/m$ — ускорение под действием силы F_0; на трёх ступенях ускорения равны $2a_0$ (за время 2τ), $4a_0$ (за τ) и a_0 (за τ); s_k, A_k — путь и работа на k-й ступени.

Пункт 1.2.1. Импульс постоянной силы за время Δt равен $F\Delta t$; для ступенчатой силы импульсы ступеней складываются. Это снова площадь под графиком $F(t)$ (рисунок).



Импульс силы за всё время 4τ (первое определение: постоянная сила $\langle F\rangle_P$ за то же время 4τ сообщает тот же импульс):

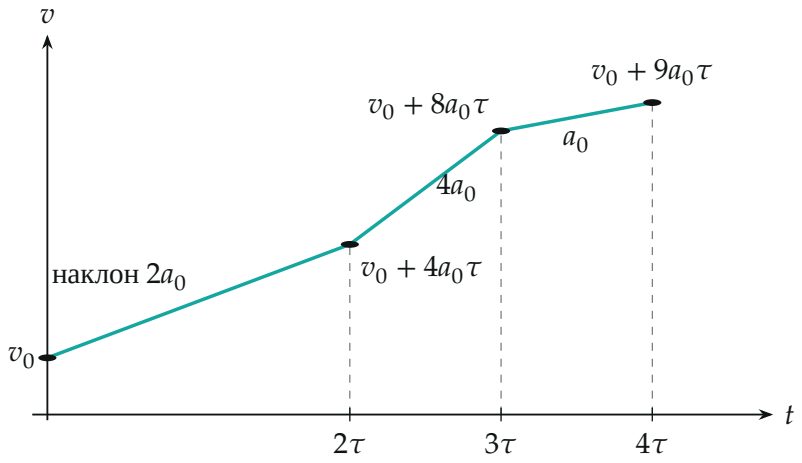
$$\langle F\rangle_P \cdot 4\tau = 2F_0 \cdot 2\tau + 4F_0 \cdot \tau + F_0 \cdot \tau = 9F_0\tau \quad \Rightarrow \quad \langle F\rangle_P = \frac{9}{4}F_0.$$

Пунктирная линия на рисунке — эта постоянная сила: прямоугольник под ней высотой $\frac{9}{4}F_0$ и шириной 4τ имеет ту же площадь, что и ступенчатая фигура. Здесь нужны только силы и времена, начальная скорость и масса не понадобились.

Пункт 1.2.2. Работа постоянной силы $A = F\Delta s$. Условие второго определения: постоянная сила $\langle F\rangle_E$ на том же пути $S = s_1 + s_2 + s_3$ совершает ту же работу $A = A_1 + A_2 + A_3$, значит

$$\langle F\rangle_E = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{s_1 + s_2 + s_3} = \frac{F_1 s_1 + F_2 s_2 + F_3 s_3}{s_1 + s_2 + s_3}.$$

Нужно найти пути ступеней: тело движется равноускоренно на каждой ступени, $s = vt + \frac{at^2}{2}$, а конечная скорость ступени — начальная скорость следующей. Скорость по ступеням (рисунок): к концу первой ступени $v_0 + 2a_0 \cdot 2\tau = v_0 + 4a_0\tau$, второй $v_0 + 4a_0\tau + 4a_0\tau = v_0 + 8a_0\tau$, третьей $v_0 + 9a_0\tau$.



Скорость тела: на каждой ступени она растёт линейно с наклоном, равным ускорению ($2a_0$, $4a_0$, a_0). На рисунке для наглядности взяты $v_0 = 1$ и $a_0\tau = 0{,}5$ в произвольных единицах.

Путь и работа по ступеням ($s = \frac{v_{\text{нач}}+v_{\text{кон}}}{2}\,t$ для равноускоренного движения):

- ступень 1, $t = 2\tau$, $F = 2F_0$: $s_1 = \dfrac{v_0 + (v_0 + 4a_0\tau)}{2} \cdot 2\tau = 2v_0\tau + 4a_0\tau^2$, $A_1 = 2F_0(2v_0\tau + 4a_0\tau^2)$;
- ступень 2, $t = \tau$, $F = 4F_0$: $s_2 = \dfrac{(v_0 + 4a_0\tau) + (v_0 + 8a_0\tau)}{2}\,\tau = v_0\tau + 6a_0\tau^2$, $A_2 = 4F_0(v_0\tau + 6a_0\tau^2)$;
- ступень 3, $t = \tau$, $F = F_0$: $s_3 = \dfrac{(v_0 + 8a_0\tau) + (v_0 + 9a_0\tau)}{2}\,\tau = v_0\tau + \dfrac{17}{2}a_0\tau^2$, $A_3 = F_0(v_0\tau + \frac{17}{2}a_0\tau^2)$.

Суммы:

$$S = 4v_0\tau + \frac{37}{2}\,a_0\tau^2, \qquad A = F_0\Big(9v_0\tau + \frac{81}{2}\,a_0\tau^2\Big).$$

Отсюда

$$\langle F\rangle_E = \frac{A}{S} = F_0\,\frac{9v_0 + \frac{81}{2}\,a_0\tau}{4v_0 + \frac{37}{2}\,a_0\tau} = F_0\,\frac{18v_0 + 81\,a_0\tau}{8v_0 + 37\,a_0\tau}, \qquad a_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Пункт 1.2.3. При $v_0 = 0$ слагаемые с v_0 исчезают:

$$\langle F\rangle_E = F_0\,\frac{81/2}{37/2} = \frac{81}{37}\,F_0 \approx 2{,}19\,F_0,$$

что чуть меньше $\langle F\rangle_P = \frac{9}{4}F_0 = 2{,}25\,F_0$. Причина различия понятна из определений. В импульсе каждая ступень входит с весом, пропорциональным времени, а в работе — пропорциональным пройденному пути. Последняя ступень с малой силой F_0 проходится на самой большой скорости, путь на ней велик, и она сильнее тянет «энергетическое» среднее вниз.

Проверка. Работа равна изменению кинетической энергии. Конечная скорость $v_0 + 9a_0\tau$, поэтому

$$A = \frac{m(v_0 + 9a_0\tau)^2 - mv_0^2}{2} = m\Big(9v_0a_0\tau + \frac{81}{2}a_0^2\tau^2\Big)$$
$$= F_0\Big(9v_0\tau + \frac{81}{2}a_0\tau^2\Big),$$

в точности как и по ступеням. Размерность: числитель и знаменатель дроби — скорости, множитель безразмерный. Предел $v_0 \gg a_0\tau$ (тело почти не разгоняется): $\langle F\rangle_E \to \frac{9}{4}F_0 = \langle F\rangle_P$, потому что путь на каждой ступени тогда пропорционален времени, и два определения совпадают.

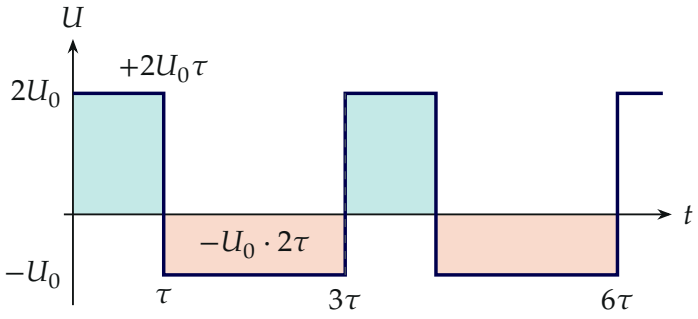
Задача 1.3. Средняя сила тока.

Что происходит. Напряжение меняется периодически с периодом 3τ: в течение τ оно равно $2U_0$, затем 2τ равно $-U_0$. Ток через резистор $I = U/R$ тоже меняет знак. Заряд, прошедший по цепи, зависит от знака тока (заряды противоположных направлений вычитаются), а нагрев — нет: мощность I^2R всегда положительна. Поэтому «зарядовое» и «тепловое» средние сильно отличаются.

Обозначения. $I_0 = U_0/R$; $T = 3\tau$ — период. Так как $\Delta t \gg \tau$, в промежутке укладывается много целых периодов, и достаточно рассмотреть один период.

Пункт 1.3.1. При постоянном токе I за время Δt проходит заряд $q = I\Delta t$, при переменном — алгебраическая сумма зарядов ступеней (пло-

щадь под графиком $I(t)$ со знаком). За один период ток $2I_0$ течёт время τ, ток $-I_0$ — время 2τ (рисунок).



Площадь над осью — заряд в одном направлении, под осью — в обратном (графики $U(t)$ и $I(t) = U/R$ отличаются только масштабом по вертикали).

Заряд за период:

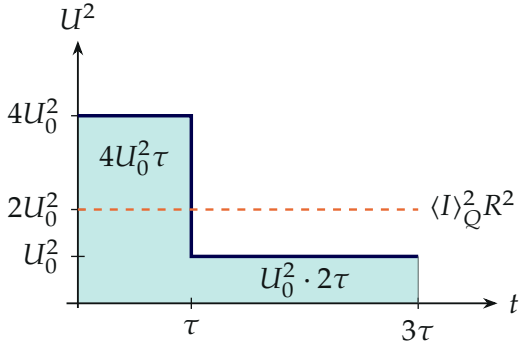
$$q_T = \frac{2U_0}{R} \cdot \tau + \left(-\frac{U_0}{R}\right) \cdot 2\tau = 2I_0\tau - 2I_0\tau = 0.$$

Положительный и отрицательный заряды точно гасят друг друга, поэтому

$$\langle I \rangle_q \, \Delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle I \rangle_q = 0.$$

(Если Δt не равно целому числу периодов, остаётся заряд не больше $2I_0\tau$ из неполного периода; при $\Delta t \gg \tau$ его вклад в среднее мал.)

Пункт 1.3.2. Закон Джоуля — Ленца: при постоянном токе за время Δt на резисторе выделяется $Q = I^2 R\,\Delta t$; на ступени с током I_k длительностью t_k — $I_k^2 R\, t_k$. Эти теплоты складываются без учёта знака тока. Среднее по определению: постоянный ток $\langle I \rangle_Q$ за период 3τ даёт ту же теплоту (рисунок: площадь под графиком $U^2(t)$ пропорциональна теплоте, $Q = \int \frac{U^2}{R}\, dt$).



Площадь под графиком U^2 за период — $6U_0^2\tau$. Пунктиром — постоянный уровень $\langle I\rangle_Q^2 R^2$, дающий ту же площадь на отрезке 3τ.

Теплота за период по ступеням и теплота при постоянном токе $\langle I\rangle_Q$:

$$\langle I\rangle_Q^2 R \cdot 3\tau = \frac{(2U_0)^2}{R}\,\tau + \frac{(-U_0)^2}{R}\cdot 2\tau = \frac{6U_0^2\tau}{R}.$$

Отсюда

$$\langle I\rangle_Q = \sqrt{\frac{6U_0^2\tau}{3R^2\tau}} = \sqrt{2}\,\frac{U_0}{R} = \sqrt{2}\,I_0.$$

Проверка. Размерность: U_0/R — сила тока. Среднее по времени модуля тока равно $\frac{4}{3}I_0 \approx 1{,}33I_0$ (токи $2I_0$ и I_0 действуют τ и 2τ), это меньше найденного $1{,}41I_0$: нагрев зависит от квадрата тока, поэтому большие значения тока вносят больший вклад, чем в простое среднее — и «тепловое» среднее всегда не меньше среднего модуля. Смысл: зарядовое среднее показывает, что по цепи в среднем ничего не «перетекает» (ток переменный, ноль), а тепловое — что цепь греется как при постоянном токе $\sqrt{2}\,U_0/R$. Именно такое «действующее» значение тока используют в электротехнике.

Ответ. 1.1.1) $\langle v\rangle = \frac{9}{4}v_0$; 1.1.2) $\langle v\rangle = \frac{16}{9}v_0$; 1.2.1) $\langle F\rangle_P = \frac{9}{4}F_0$;

1.2.2) $\langle F\rangle_E = F_0\,\dfrac{9v_0 + \frac{81}{2}a_0\tau}{4v_0 + \frac{37}{2}a_0\tau}$, где $a_0 = F_0/m$; 1.2.3) $\langle F\rangle_E = \frac{81}{37}F_0$;

1.3.1) $\langle I\rangle_q = 0$; 1.3.2) $\langle I\rangle_Q = \sqrt{2}\,\dfrac{U_0}{R}$.