Изучение лампочки накаливания

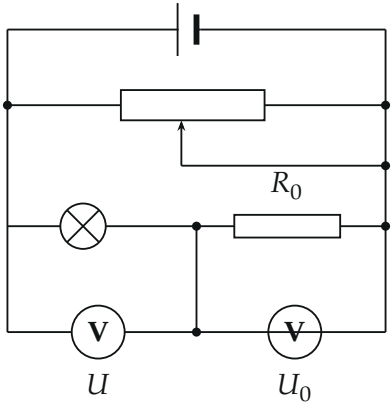
Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 9 класс, задача 2]

При подготовке к Новому году Фёдор решил самостоятельно изготовить гирлянду из лампочек накаливания. Чтобы сразу не сжечь все имеющиеся лампочки и чтобы они нормально светились, Фёдор решил провести экспериментальные исследования характеристик этого нехитрого прибора.

Часть 1. Вольтамперная характеристика лампочки.

Фёдор переключил мультиметр в режим омметра и измерил сопротивление лампочки при комнатной температуре $t_0 = 23\,^\circ\text{C}$, оно оказалось равным $R_{0,л} = 1{,}92$ Ом.

Основной характеристикой любого элемента электрической цепи является ВАХ — вольтамперная характеристика, зависимость силы тока от приложенного напряжения. Для её измерения Фёдор собрал электрическую цепь, показанную на рисунке. Изменяя сопротивление переменного резистора, Фёдор измерил значения напряжений на лампочке U и на постоянном резисторе (сопротивление которого $R_0 = 0{,}62$ Ом) — U_0. Результаты измерений приведены в таблице.



N	U, В	U_0, мВ	N	U, В	U_0, мВ
1	0,65	72,6	6	3,22	160,3
2	1,03	88,7	7	3,64	170,9
3	1,51	108,1	8	4,14	182,1
4	2,07	126,9	9	4,55	191,3
5	2,62	143,9	10	4,90	199,7

1.1 Постройте график вольтамперной характеристики лампочки накаливания по результатам измерений Фёдора. Результаты необходимых расчётов приведите в таблице, укажите формулы, по которым Вы провели расчёт.

Для проверки своих измерений и построений Фёдор собрал цепь из трёх последовательно соединённых лампочек и подключил к источнику напряжения $U_1 = 4{,}5$ В.

1.2 Чему равна потребляемая мощность P_1 в этой цепи?

После этого Фёдор соединил эти 3 лампочки параллельно и подключил к тому же источнику напряжения $U_1 = 4{,}5$ В.

1.3 Чему равна потребляемая мощность P_2 в этой цепи?

Для теоретического описания проведённого эксперимента Фёдор решил использовать следующие приближения: 1) Сопротивление лампочки линейно зависит от её температуры t:

$$R = R_0(1 + \alpha(t - t_0)) \tag{1}$$

Температурный коэффициент сопротивления вольфрама Фёдор нашёл в справочнике: $\alpha = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Здесь К — градус Кельвина. Температура по абсолютной шкале Кельвина связана с температурой по шкале Цельсия простым соотношением

$$T(\text{К}) = t(^\circ\text{C}) + 273{,}15\ \text{К}. \tag{2}$$

2) Мощность тепловых потерь лампочки (т. е. количество теплоты, уходящей в воздух в единицу времени) пропорциональна разности темпе-

ратур нити накаливания t и окружающего воздуха t_0:

$$P = \beta\,(t - t_0) \tag{3}$$

где β — неизвестный постоянный коэффициент, который Фёдор решил определить на основании экспериментальных данных.

В рамках этой линейной модели Фёдор сумел получить явный вид зависимости силы тока через лампочку от напряжения на ней.

1.4 Найдите явный вид зависимости силы тока через лампочку от напряжения на ней $I(U)$ в рамках линейной модели.

Полученная зависимость оказалась слишком громоздкой и трудно поддающейся анализу. Кроме того, у Фёдора возникла идея, как можно проверить применимость линейной модели к проведённому эксперименту. Он сообразил, что можно легко рассчитать на основе результатов измерений мощность, выделяющуюся на лампочке P, и её сопротивление R, и построить соответствующий график $R(P)$. Фёдор провёл необходимые расчёты, построил график этой зависимости и — с сожалением отверг линейную модель!

1.5 Найдите явный вид зависимости сопротивления лампочки от выделяющейся на ней мощности $R(P)$.

1.6 Проведите необходимые численные расчёты и постройте график зависимости $R(P)$ и кратко поясните, почему Фёдор отверг линейную модель.

Примечания. Результаты расчётов занесите в таблицу. Достаточно провести расчёты для половины точек, только выбирайте их разумно.

Для дальнейшего анализа Фёдор, тем не менее, решил оценить максимальную температуру нити накаливания в своём эксперименте.

1.7 Оцените максимальную температуру нити накаливания на основании линейной модели.

Часть 2. Строгая теоретическая модель.

После продолжительных размышлений Фёдор решил, что основной недостаток линейной модели заключается в выборе механизма тепловых потерь лампочки, который описывается формулой (3). Действительно, нить накала разогревается достаточно сильно, в результате чего она

и светится. Следовательно, основным механизмом тепловых потерь является излучение света. Пришлось опять обратиться к справочникам. В результате «рыскания» по Интернету Фёдор решил использовать следующие данные: 1) Мощность теплового излучения нагретых тел определяется формулой

$$P_{\text{изл.}} = A\,T^n, \tag{4}$$

где T — абсолютная температура тела, A — некоторый постоянный коэффициент, n — целое число. 2) Абсолютная температура T и электрическое сопротивление вольфрамовой нити в достаточно широком диапазоне температур связаны соотношением

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{4}{5}}, \tag{5}$$

здесь R_0 — сопротивление нити при температуре T_0.

2.1 Проведите необходимые расчёты и постройте график зависимости мощности потерь лампочки от абсолютной температуры $P(T)$.

Примечания. Не забудьте привести все формулы, которые Вы использовали в ходе расчётов. Достаточно провести расчёты для половины точек, только выбирайте их разумно. Можно построить график зависимости $P(T)$ в относительных единицах (не забудьте указать каких).

2.2 Используя любой метод (строгого расчёта, подбора, угадывания — но с обоснованием найденного значения) определите показатель степени в формуле (5).

2.3 Найдите максимальную температуру нити накаливания лампочки в этом эксперименте.

▲ **Решение. Часть 1. Вольтамперная характеристика.**

Что происходит. Лампочка — не обычный резистор: чем больше ток, тем сильнее разогревается нить, а сопротивление металла растёт с температурой, поэтому ток растёт медленнее напряжения. Постоянный резистор $R_0 = 0{,}62$ Ом включён последовательно с лампочкой как «амперметр»: по нему течёт тот же ток, что и через лампочку, а измерять напряжение на нём удобнее, чем ток. Главная идея — из двух напряжений U и U_0 получить и ток, и мощность, и сопротивление лампочки,

дальше работать с таблицей и графиками.

Обозначения. U — напряжение на лампочке; U_0 — на резисторе R_0; I — общий ток лампочки и резистора; $P = UI$ — мощность, выделяющаяся на лампочке (она же в стационарном состоянии равна мощности теплопотерь); $R = U/I$ — сопротивление нити при данном режиме; $R_{0,\text{л}} = 1{,}92$ Ом — сопротивление лампочки при комнатной температуре (в формулах (1), (5) его обозначают R_0, чтобы не путать с резистором, ниже пишем $R_{\text{хол}} = 1{,}92$ Ом).

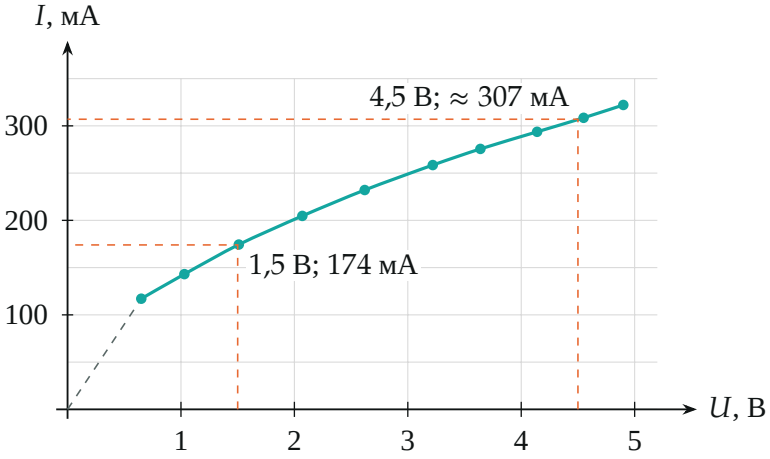
1.1. Ток и график ВАХ. Лампочка и резистор соединены последовательно (см. рисунок условия), ток один и тот же. Закон Ома для участка цепи с резистором R_0:

$$I = \frac{U_0}{R_0}.$$

Заодно считаем мощность $P = UI$ и сопротивление нити $R = U/I$ — они понадобятся ниже.

N	U, В	I, мА	P, Вт	R, Ом
1	0,65	117,1	0,076	5,55
2	1,03	143,1	0,147	7,20
3	1,51	174,4	0,263	8,66
4	2,07	204,7	0,424	10,11
5	2,62	232,1	0,608	11,29
6	3,22	258,5	0,833	12,45
7	3,64	275,6	1,003	13,21
8	4,14	293,7	1,216	14,10
9	4,55	308,5	1,404	14,75
10	4,90	322,1	1,578	15,21

Строим график $I(U)$ по точкам (рисунок). Кривая выпуклая вверх: ток растёт всё медленнее, сопротивление нити растёт.



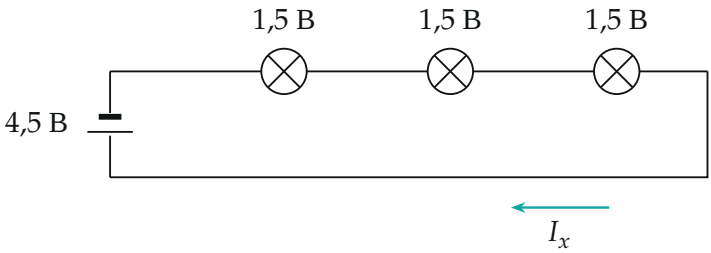
ВАХ лампочки по таблице. Красные точки — значения, которые нужны в пунктах 1.2 и 1.3.

1.2. Три лампочки последовательно. Лампочки одинаковые, ток через них один и тот же, значит, и напряжения одинаковы: сумма напряжений равна напряжению источника,

$$U_x = \frac{U_1}{3} = 1{,}5\ \text{В}.$$

По ВАХ при 1,5 В ток равен $I_x = 174$ мА (строка 3 таблицы: 1,51 В, 174 мА). Источник отдаёт мощность

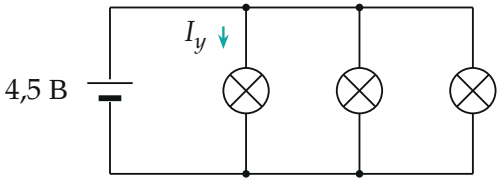
$$P_1 = U_1 I_x = 4{,}5\ \text{В} \cdot 0{,}174\ \text{А} = 0{,}78\ \text{Вт}.$$



Последовательное соединение: ток один, напряжение 4,5 В делится поровну.

1.3. Три лампочки параллельно. Теперь каждая лампочка подключена напрямую к источнику, напряжение на каждой $U_1 = 4{,}5$ В. По ВАХ при 4,5 В ток через одну лампочку $I_y \approx 307$ мА (между строками 8 и 9: 4,14 В → 294 мА, 4,55 В → 309 мА). Токи ветвей складываются, мощность цепи

$$P_2 = 3U_1 I_y \approx 3 \cdot 4{,}5\ \text{В} \cdot 0{,}307\ \text{А} \approx 4{,}2\ \text{Вт}.$$



Параллельное соединение: напряжение на каждой лампочке 4,5 В, токи складываются.

Обратите внимание. Мощность последовательной цепи (0,78 Вт) в 5,4 раза меньше параллельной (4,2 Вт). Для трёх обычных резисторов отношение было бы ровно 9 ($P = U^2/R$ при втрое меньшем напряжении на каждом). Меньше девяти оно потому, что лампочка нелинейна: при 1,5 В нить холоднее, её сопротивление меньше, чем при 4,5 В, и ток больше, чем у «горячего» резистора.

1.4. Явная зависимость $I(U)$ в линейной модели. Закон Ома для нити с сопротивлением (1), где $\Delta t = t - t_0$:

$$I = \frac{U}{R_{\text{хол}}(1 + \alpha\,\Delta t)}.$$

Температура нити неизвестна. Определим её тепловым балансом: при установившейся температуре мощность тока UI равна мощности теплопотерь (3), $UI = \beta\,\Delta t$. Отсюда $\Delta t = UI/\beta$. Подставляем в закон Ома:

$$I = \frac{U}{R_{\text{хол}}(1 + \frac{\alpha}{\beta} UI)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} U I^2 + I - \frac{U}{R_{\text{хол}}} = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно I. Ток положителен, берём положительный корень:

$$I(U) = \frac{\sqrt{1 + 4\,\dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{U^2}{R_{\text{хол}}}} - 1}{2\,\dfrac{\alpha}{\beta}\,U}.$$

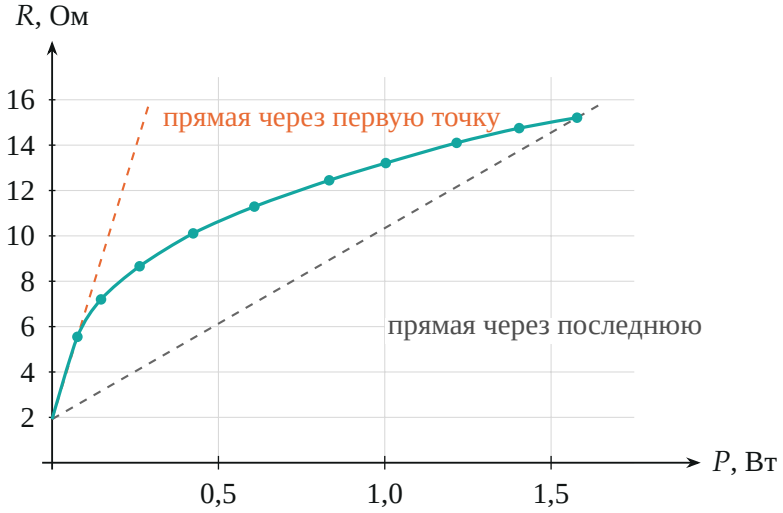
Проверка предела: при малых U (нить холодная, $\frac{\alpha}{\beta}\frac{U^2}{R_{\text{хол}}} \ll 1$) корень разлагается $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, и $I \approx U/R_{\text{хол}}$ — закон Ома холодного резистора. При больших U ток стремится к постоянному значению $1/\sqrt{(\alpha/\beta)R_{\text{хол}}}$: нить так сильно нагревается, что сопротивление растёт почти пропорционально напряжению.

1.5. Зависимость $R(P)$. Из того же уравнения $\dfrac{U}{I} = R_{\text{хол}}(1 + \frac{\alpha}{\beta}UI)$ видно, что слева стоит сопротивление нити $R = U/I$, а $UI = P$ — мощность. Значит, линейная модель предсказывает *прямую*:

$$R(P) = R_{\text{хол}}\Big(1 + \frac{\alpha}{\beta}\,P\Big).$$

Прямая начинается в точке $R = R_{\text{хол}} = 1{,}92$ Ом при $P = 0$ и имеет постоянный наклон $R_{\text{хол}}\alpha/\beta$. Это удобная проверка: нужно построить R против P и посмотреть, лежат ли точки на прямой.

1.6. График $R(P)$ и отказ от модели. В таблице уже посчитаны $P = UI$ и $R = U/I$. График — рисунок ниже.



Точки измерений $R(P)$ и две прямые, выходящие из точки $(0;\ 1{,}92\ \text{Ом})$: через первую и через последнюю точку. Точки не лежат ни на одной прямой.

Линейная модель требует, чтобы все точки лежали на *одной* прямой, выходящей из $R_{\text{хол}} = 1{,}92$ Ом. Прямая через первую точку ($P = 0{,}076$ Вт, $R = 5{,}55$ Ом) имеет наклон $\approx 47{,}7$ Ом/Вт, через последнюю — $\approx 8{,}4$ Ом/Вт: различие почти в шесть раз. Остальные точки лежат между ними, график заметно выпуклый вверх. Эквивалентный взгляд на то же: безразмерная величина $(R/R_{\text{хол}} - 1)/P$ в модели обязана равняться постоянному α/β, а по таблице она падает от 24,8 до 4,4 Вт^{-1}, то есть, пересчитывая в $\beta = \alpha P/(R/R_{\text{хол}} - 1)$, «коэффициент теплоотдачи» растёт в 5,7 раза. Значит, предположение о пропорциональности теплопотерь разности температур (3) не выполняется.

1.7. Максимальная температура в линейной модели. Здесь пользуемся только связью сопротивления с температурой (1). Наибольшее сопротивление нити — в последнем опыте: $R_{\max} = U/I = 4{,}90\ \text{В}/0{,}3221\ \text{А} = 15{,}2$ Ом. Из (1)

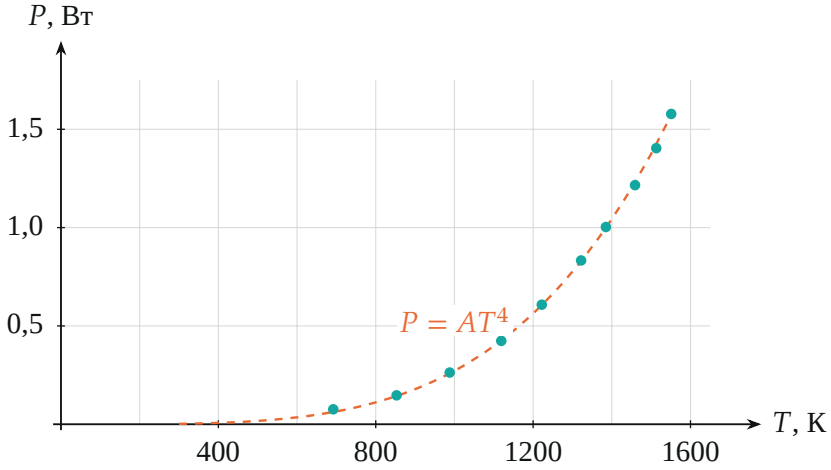
$$t_{\max} = t_0 + \frac{R_{\max}/R_{\text{хол}} - 1}{\alpha} = 23\,^\circ\text{C} + \frac{15{,}21/1{,}92 - 1}{5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}}$$
$$\approx 1{,}4 \cdot 10^3\,^\circ\text{C} \quad (T \approx 1{,}68 \cdot 10^3\ \text{K}).$$

Часть 2. Строгая модель теплопотерь излучением.

Что происходит. Нить раскалена до сотен и тысяч градусов, и основной канал потери энергии — излучение, мощность которого зависит от температуры гораздо круче, чем линейно. Нам известна мощность потерь (она равна мощности тока $P = UI$) и температуру можно вычислить через сопротивление по формуле (5): $T = T_0(R/R_{\text{хол}})^{4/5}$, $T_0 = 273{,}15 + 23 = 296{,}15$ К. Значит, из тех же измерений получаем точки $(T;\, P)$ и можем искать степень n в $P = AT^n$.

2.1. График $P(T)$. Температура по (5) для каждой строки, мощность взята из таблицы выше. Для проверки закона $P = AT^n$ в последнем столбце — отношение P/T^4.

N	T, К	P, Вт	P/T^4, 10^{-13} Вт/К^4
1	692	0,076	3,31
2	853	0,147	2,79
3	988	0,263	2,76
4	1119	0,424	2,70
5	1222	0,608	2,73
6	1322	0,833	2,73
7	1385	1,003	2,73
8	1459	1,216	2,68
9	1513	1,404	2,68
10	1551	1,578	2,73



Точки $(T;P)$ и кривая $P = AT^4$ с $A = 2{,}72 \cdot 10^{-13}$ Вт/К^4.

2.2. Показатель степени. Если $P = AT^n$, то отношение P/T^n постоянно, а $\ln P$ линейно зависит от $\ln T$ с наклоном n. Проверяем два способа.

Способ 1: подбор. Для $n = 4$ отношение P/T^4 в таблице почти постоянно: $0{,}27 \cdot 10^{-13}$ Вт/К^4 с отклонением в пределах 2 % для точек 3–10 (первая точка: нить ещё холодная и существенная доля тепла уходит теплопроводностью воздуха и подводов). Для $n = 3$ отношение вырастает почти вдвое от начала к концу, для $n = 5$ — падает в 2,7 раза: ни одно из них постоянным не назовёшь.

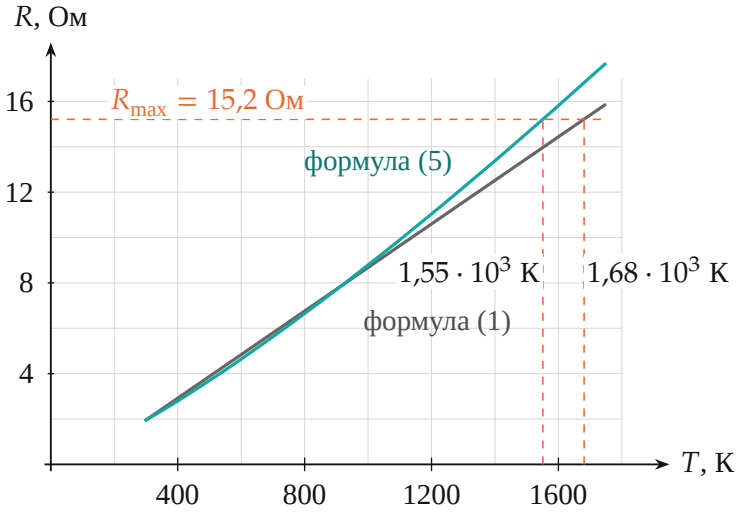
Способ 2: наклон в логарифмах. По формуле метода наименьших квадратов для $\ln P$ от $\ln T$ по точкам 2–10 получается $n = 3{,}96 \approx 4$. Поскольку n — целое число, $n = 4$.

Физический смысл: для идеально чёрного тела мощность излучения $P = \sigma S T^4$, и по найденному $A \approx 2{,}7 \cdot 10^{-13}$ Вт/К^4 получается площадь поверхности нити $S = A/\sigma \approx 4{,}8$ мм^2 ($\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^{2}К^4)) — правдоподобный размер тонкой спирали.

2.3. Максимальная температура. Максимальна температура в последнем опыте, где сопротивление наибольшее: по (5)

$$T_{\max} = T_0\left(\frac{R_{\max}}{R_{\text{хол}}}\right)^{4/5} = 296{,}15\ \text{К} \cdot \left(\frac{15{,}21}{1{,}92}\right)^{0{,}8} \approx 1{,}55 \cdot 10^3\ \text{К},$$

то есть $t_{\max} = T_{\max} - 273{,}15 \approx 1{,}3 \cdot 10^3\,^\circ\text{C}$. Оценка линейной модели ($1{,}4{\cdot}10^3\,^\circ\text{C}$) отличается примерно на 10 %: связь (1) для температур порядка тысяч кельвинов лишь приближённая, а точная — (5). Но принципиальная причина провала линейной модели не в ней, а в теплопотерях (3): оба расчёта температуры близки между собой, а при линейном законе потерь точки $R(P)$ не легли бы на кривую.



Сопротивление нити как функция температуры по формуле (1) (прямая) и по формуле (5) (кривая). Одному и тому же $R_{\max}$ соответствуют $1{,}68 \cdot 10^3$ K и $1{,}55 \cdot 10^3$ K.

Проверка. Размерности: α/β — Вт^{-1} (произведение $\frac{\alpha}{\beta}P$ безразмерно); A — Вт/К^4. Температура $1{,}55 \cdot 10^3$ К меньше рабочей температуры обычных ламп накаливания (около 2,5–3 $\cdot\, 10^3$ К), как и должно быть для лампочки, работающей при заниженном напряжении. Пределы: холодная нить ($U \to 0$) даёт $I = U/R_{\text{хол}}$; при $T \to T_0$ формула (5) даёт $R = R_{\text{хол}}$.

Ответ. 1.1) таблица и график ВАХ, $I = U_0/R_0$ (мА): 117, 143, 174, 205, 232, 259, 276, 294, 309, 322; 1.2) $P_1 \approx 0{,}78$ Вт; 1.3) $P_2 \approx 4{,}2$ Вт; 1.4) $I(U) = \dfrac{\sqrt{1 + 4\frac{\alpha}{\beta}\frac{U^2}{R_{\text{хол}}}} - 1}{2\frac{\alpha}{\beta}U}$; 1.5) $R(P) = R_{\text{хол}}(1 + \frac{\alpha}{\beta}P)$; 1.6) точки

$R(P)$ не лежат на прямой (наклон падает в ≈ 6 раз), линейная модель отвергнута; 1.7) $t_{\max} \approx 1{,}4 \cdot 10^3\,^\circ\mathrm{C}$; 2.2) $n = 4$; 2.3) $T_{\max} \approx 1{,}55 \cdot 10^3$ K, $t_{\max} \approx 1{,}3 \cdot 10^3\,^\circ\mathrm{C}$.