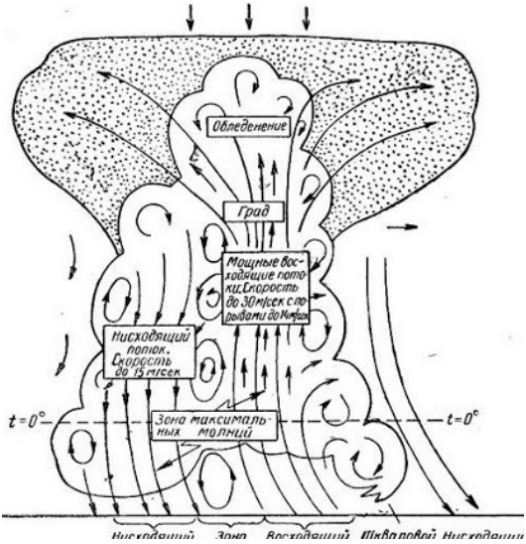
Дождевые облака

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2024/25, 9 класс, задача 3]

Как и все природные явления, образование облаков, возникновение дождя и градов, гроз являются очень сложными и трудно описываемыми физическими явлениями. Физика облаков, физика атмосферы — разделы физики, которые продолжают активно развиваться.

В данной задаче Вам предстоит провести некоторые простые оценки, связанные с движением дождевых капель в облаке и под ним.

Справа показана простейшая модель мощной грозовой ячейки. Не пугайтесь — рассчитывать все её параметры вам не придётся. Этот рисунок приведён для того, чтобы показать, что движение воздуха в нём может быть направлено вверх, вниз, в стороны — в общем куда угодно!



Для решения задачи Вам понадобятся следующие характеристики воздуха и воды:

- плотность воды $\rho_0 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3;
- плотность воздуха будем считать постоянной и равной $\rho = 1{,}2$ кг/м^3;

- плотность водяного пара в воздухе при температуре воздуха у поверхности земли $t = 25\,^\circ\text{C}$ равна $\rho_{\text{пар}} = 2{,}3 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3; а при температуре $t = 0\,^\circ\text{C}$ содержанием воды в воздухе можно пренебречь;
- вязкость воздуха (величина, которая определяет силы сопротивления воздуха, она понадобится вам один раз, в одной формуле) $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с);
- ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Формула для объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — его радиус. Во всех частях задания считайте, что капли (и градины) имеют форму шара.

Серьёзная математическая подсказка. Если скорость тела зависит от времени по закону $v = bt^\gamma$, то изменение координаты тела (при любых γ) описывается формулой

$$x = \frac{bt^{\gamma+1}}{\gamma+1}.$$

Например, примените эту формулу для $\gamma = 1$.

Часть 1. Падение дождевых капель.

В учебниках физики можно найти формулы для силы сопротивления воздуха F, действующей на движущийся шарик. При малых скоростях используется формула (которая называется формулой Стокса)

$$F_1 = 6\pi\eta r v \tag{1}$$

здесь r — радиус шарика, v — его скорость, η — коэффициент вязкости воздуха. При больших скоростях сила сопротивления определяется формулой:

$$F_2 = C_x \frac{1}{2}\rho v^2 S, \tag{2}$$

где $C_x = 0{,}47$ — безразмерный коэффициент лобового сопротивления шарика, ρ — плотность воздуха, $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения шарика.

Сейчас Вам необходимо выбрать, какую формулу следует использо-

вать в данной задаче. В реальности действуют обе силы (они имеют разную природу). Разумно выбирать ту силу, которая больше, меньшей силой можно пренебрегать.

1.1 Нарисуйте очень схематические графики зависимости силы сопротивления от скорости, описываемые формулами (1) и (2).

1.2 Получите формулу для «критической» скорости шарика $v_{кр}$, при которой обе формулы дают одинаковые значения. Рассчитайте численное значение этой критической скорости для капли радиуса $r_0 = 1{,}0$ мм.

1.3 Укажите, какую формулу для силы сопротивления следует использовать при описании движения капли в воздухе. Ответ кратко обоснуйте.

Независимо от вашего ответа на вопрос 1.3, далее используйте формулу (2).

Рассмотрим каплю, падающую в воздухе. По прошествии небольшого времени с начала падения, капля продолжает двигаться с некоторой постоянной, установившейся скоростью V. Можно считать, что капля достигает установившейся скорости за очень малый промежуток времени.

1.4 Покажите, что скорость установившегося движения капли радиуса r можно представить в виде

$$V = V_0\sqrt{\frac{r}{r_0}} \qquad (3)$$

где V_0 — скорость установившегося движения капли радиуса r_0.

1.5 Рассчитайте численное значение скорости V_0, если $r_0 = 1{,}0$ мм.

В дальнейшем используйте формулу (3), считая величины V_0, r_0 известными (даже если вам их не удалось найти)!

Теперь Вам необходимо объяснить, почему всегда дождь начинается с падения самых крупных капель. Пусть нижняя граница облака находится на высоте $H = 1{,}0$ км. Рассмотрим две капли, радиус одной равен $r_0 = 1{,}0$ мм, а радиус второй $r_2 = 4{,}0$ мм, которые одновременно начинают падать из нижней границы облака.

1.6 Рассчитайте, чему равна разность времён падения этих капель, считая, что движением воздуха под тучей можно пренебречь.

Пусть в процессе падения радиус капли незначительно уменьшается из-за её испарения по закону

$$r = r_0(1 - \gamma t) \tag{4}$$

где γ — малая величина.

1.7 Найдите закон движения испаряющейся капли $z(t)$, где z — расстояние от нижнего края облака.

Подсказка. При малых $x \ll 1$ можно воспользоваться приближённой формулой

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \tag{5}$$

Часть 2. Капля в облаке.

Пусть в облаке образовался восходящий поток, движущийся вверх со скоростью $U = 30$ м/с.

2.1 Рассчитайте, с какой скоростью относительно земли будет подниматься капля радиуса $r_0 = 1{,}0$ мм.

Рассмотрим каплю, которая зародилась на нижней границе облака. В процессе движения капли в облаке её радиус возрастает вследствие продолжающейся конденсации водяных паров в облаке. На некоторой высоте капля замерзнет и превратится в градину. Пренебрежём различием в плотностях воды и льда. В этом случае движение капли и замёрзшей градины описываются одинаково. Теория конденсации утверждает, что скорость роста радиуса капли описывается приближённой формулой

$$r^2 \approx \alpha t. \tag{6}$$

где $\alpha = 3{,}0 \cdot 10^{-7}$ м^2/с — постоянная величина. В этой формуле предполагается, что размер зародыша, из которого начинает расти капля, пренебрежимо мал. Этот закон справедлив при движении капли как вверх, так и вниз.

2.2 Рассчитайте, при каком радиусе капли r_s она прекратит подниматься вверх.

2.3 Рассчитайте, за какое время τ_1 и на какую максимальную высоту $z_{\max}$ относительно нижнего края облака поднимется эта капля.

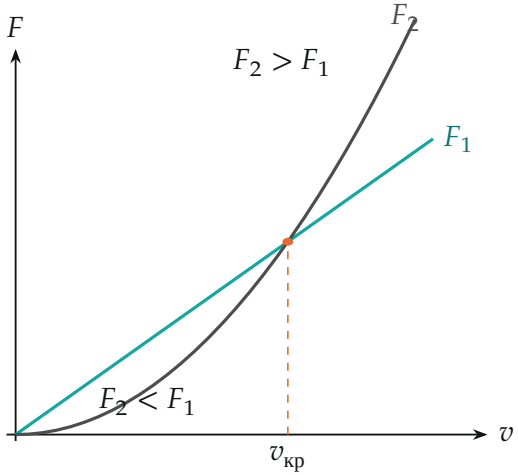
2.4 Рассчитайте радиус капли (или градины) r_m при её возвращении на нижнюю границу облака.

▲ **Решение. Часть 1. Падение дождевых капель.**

Что происходит. Капля, начав падать, ускоряется, пока сила сопротивления воздуха не сравняется с силой тяжести; после этого скорость постоянна. Сопротивление воздуха растёт со скоростью, причём по двум законам: при медленном движении — линейно (сила вязкого трения, формула Стокса), при быстром — квадратично (воздух приходится «расталкивать»). Побеждает та сила, которая больше. Дальше, зная установившуюся скорость капли, считаем времена падения; во второй части тот же закон работает в восходящем потоке, где скорость нужно считать относительно воздуха.

Обозначения. r — радиус капли, $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$ — её масса, V — установившаяся скорость падения относительно воздуха, V_0 — та же для $r_0 = 1$ мм, z — расстояние от нижнего края облака вниз (в части 1) или вверх (в части 2).

1.1. Графики. Сила Стокса $F_1 = 6\pi\eta r v$ пропорциональна скорости — это прямая из начала координат, квадратичная $F_2 = C_x \frac{1}{2}\rho v^2 \pi r^2$ — парабола, также из начала. При малых v парабола идёт ниже прямой, при больших — выше; они пересекаются при $v = v_{\text{кр}}$.



Схематические графики сил сопротивления. Левее $v_{кр}$ больше сила Стокса, правее — квадратичная.

1.2. Критическая скорость. Приравниваем силы (1) и (2) при одном и том же радиусе:

$$6\pi\eta r v = C_x \frac{\rho v^2}{2}\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{кр}} = \frac{12\,\eta}{C_x \rho\, r}.$$

Для $r_0 = 1{,}0$ мм:

$$v_{\text{кр}} = \frac{12 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5}}{0{,}47 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{кг/(м·с)}}{\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}} \approx 0{,}38 \text{ м/с}.$$

Размерность: $\eta/(\rho r)$ — $\dfrac{\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{с})}{\text{кг}/\text{м}^2} = $ м/с, верно.

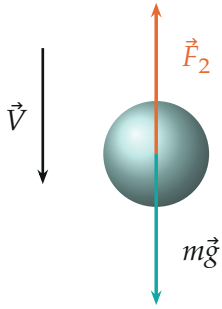
1.3. Какую формулу использовать. Падающая капля движется со скоростями порядка метров в секунду (ниже будет $V_0 \approx 6{,}8$ м/с), это в десятки раз больше $v_{\text{кр}} \approx 0{,}38$ м/с. Значит, при таких скоростях квадратичная сила (2) намного больше силы Стокса, и нужна формула (2). Обратите внимание: $v_{\text{кр}} \propto 1/r$, и чем крупнее капля, тем меньше критическая скорость; значит, для крупных капель формула (2) применима ещё лучше.

1.4. Установившаяся скорость. При постоянной скорости ускорение равно нулю, значит, сумма сил равна нулю. Второй закон Ньютона для капли в проекции на вертикаль: вес уравновешен силой сопротивления (2); выталкивающая сила воздуха $\rho g V_{\text{капли}} \ll \rho_0 g V_{\text{капли}}$ (плотность воздуха в 800 раз меньше) и не учитывается:

$$C_x \frac{\rho V^2}{2}\pi r^2 = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x\rho}}\, r.$$

Здесь всё, кроме r, постоянно, поэтому $V \propto \sqrt{r}$, и

$$V = V_0\sqrt{\frac{r}{r_0}}, \qquad V_0 = \sqrt{\frac{8\rho_0 g}{3C_x\rho}}\, r_0.$$



$F_2 = mg$

Капля при установившемся падении: сила тяжести уравновешена силой сопротивления.

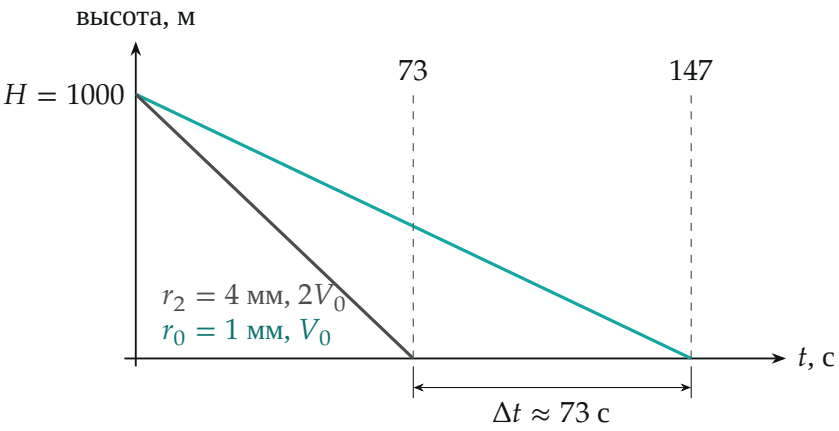
1.5. Число.

$$V_0 = \sqrt{\frac{8 \cdot 1{,}0 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 0{,}47 \cdot 1{,}2} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}}\ \text{м/с} = \sqrt{46{,}3}\ \text{м/с} \approx 6{,}8\ \text{м/с}.$$

(Совпадает по порядку с известной скоростью дождевых капель около 7 м/с.)

1.6. Разность времён падения. Скорости считаем постоянными с самого начала (разгон очень короткий). Капля r_0 летит с V_0, капля $r_2 = 4r_0$ — с $V_2 = V_0\sqrt{r_2/r_0} = 2V_0$. Времена падения с высоты H и их разность:

$$t_1 = \frac{H}{V_0}, \quad t_2 = \frac{H}{2V_0}, \qquad \Delta t = \frac{H}{V_0}\left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{r_2}}\right) \approx 73\ \text{с}.$$



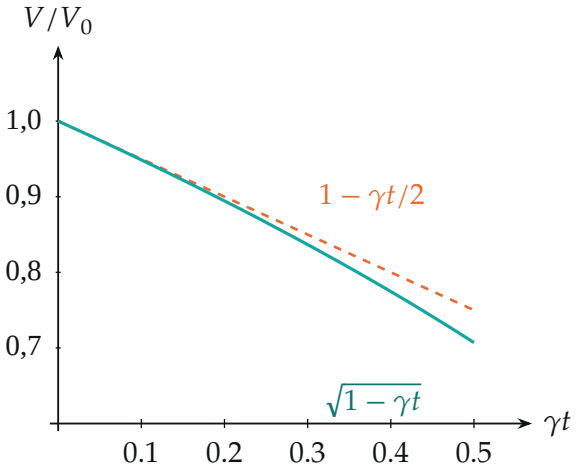
Высота капель над землёй (капли стартуют с нижнего края облака, $H = 1$ км, и падают вниз) в зависимости от времени. Большая капля прилетает вдвое быстрее.

1.7. Закон движения испаряющейся капли. Радиус по (4) уменьшается, скорость успевает подстраиваться под текущий радиус (формула (3)):

$$V = V_0\sqrt{\frac{r}{r_0}} = V_0\sqrt{1-\gamma t} \approx V_0\Big(1-\frac{\gamma t}{2}\Big) = V_0 - \frac{V_0\gamma}{2}\,t,$$

где использовано (5) при $x = -\gamma t$ (малая величина: $\gamma t \ll 1$). Скорость линейно убывает со временем — движение равнозамедленное с ускорением $V_0\gamma/2$. Путь — по математической подсказке для слагаемых $v = bt^0$ и $v = bt^1$ (или как площадь трапеции):

$$z(t) = V_0 t - \frac{V_0\gamma}{2}\cdot\frac{t^2}{2} = V_0 t - \frac{V_0\gamma\, t^2}{4}.$$



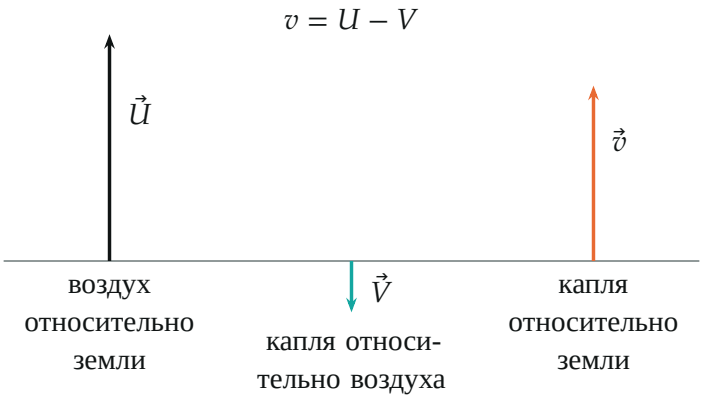
Скорость V/V_0 (ось начинается с 0,6): точная зависимость $\sqrt{1-\gamma t}$ и её линейное приближение (5). При $\gamma t \lesssim 0{,}2$ они почти неразличимы.

Часть 2. Капля в облаке.

Что происходит. В восходящем потоке сопротивление создаёт скорость капли *относительно воздуха*, а не относительно земли. Относительно воздуха капля по-прежнему «падает» с установившейся скоростью V, а сам воздух поднимается со скоростью U, поэтому относительно земли скорость капли равна $U - V$. Пока капля мала, $V < U$ и она поднимается. Но она растёт, а $V \propto \sqrt{r}$ растёт вместе с ней; когда V дорастёт до U, подъём прекратится и капля начнёт падать.

2.1. Скорость относительно земли. Поскольку скорости направлены вдоль одной вертикали, складываем проекции на вертикаль вверх: воздух движется со скоростью $+U$, капля относительно воздуха — $-V_0$:

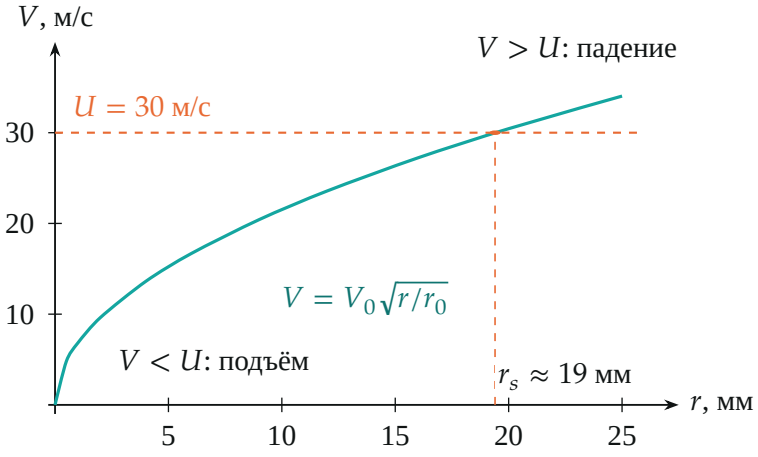
$$v = U - V_0 = 30 - 6{,}8 \approx 23 \text{ м/с (вверх).}$$



Скорости (в масштабе $U = 30$ м/с, $V_0 = 6{,}8$ м/с): в системе отсчёта воздуха капля тонет со скоростью V, поток уносит её вверх со скоростью U.

2.2. Радиус, при котором подъём прекращается. Капля растёт медленно по сравнению со временем установления скорости, поэтому в любой момент V соответствует текущему радиусу: $v(t) = U - V_0\sqrt{r(t)/r_0}$. Подъём прекращается, когда $v = 0$, то есть $V = U$:

$$V_0\sqrt{\frac{r_s}{r_0}} = U \quad \Rightarrow \quad r_s = r_0\left(\frac{U}{V_0}\right)^2 = 1{,}0\text{ мм} \cdot \left(\frac{30}{6{,}8}\right)^2 \approx 19\text{ мм}.$$



Скорость $V(r)$ растёт как $\sqrt{r}$ и пересекает уровень U при $r_s \approx 19$ мм: левее капля поднимается, правее — падает.

2.3. Время подъёма и максимальная высота. Радиус растёт по (6): $r = \sqrt{\alpha t}$, поэтому $\sqrt{r/r_0} = (\alpha t)^{1/4}/\sqrt{r_0}$ и скорость относительно земли

$$v(t) = U - \frac{V_0}{\sqrt{r_0}}\,(\alpha t)^{1/4}.$$

Скорость — сумма двух степенных слагаемых (t^0 и $t^{1/4}$), поэтому координата по математической подсказке ($\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{1}{4}$; $z = 0$ при $t = 0$):

$$z(t) = Ut - \frac{V_0}{\sqrt{r_0}}\,\alpha^{1/4}\cdot\frac{4}{5}\,t^{5/4} = Ut\Big[1 - \frac{4}{5}\,\frac{V_0}{U}\Big(\frac{\alpha t}{r_0^2}\Big)^{1/4}\Big].$$

Подъём заканчивается в момент τ_1, когда $v = 0$, то есть $r(\tau_1) = r_s$ и $\alpha\tau_1 = r_s^2$:

$$\tau_1 = \frac{r_s^2}{\alpha} = \frac{r_0^2}{\alpha}\Big(\frac{U}{V_0}\Big)^4 = \frac{(1{,}0\cdot10^{-3})^2}{3{,}0\cdot10^{-7}}\cdot\Big(\frac{30}{6{,}8}\Big)^4\ \text{с} \approx 1{,}26\cdot10^3\ \text{с} \approx 21\ \text{мин}.$$

В этот момент $\frac{V_0}{U}(\alpha\tau_1/r_0^2)^{1/4} = 1$, и в формуле скобка равна $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$:

$$z_{\max} = \frac{1}{5}\,U\tau_1 = \frac{1}{5}\cdot 30\ \text{м/с}\cdot 1{,}26\cdot10^3\ \text{с} \approx 7{,}5\cdot10^3\ \text{м}.$$

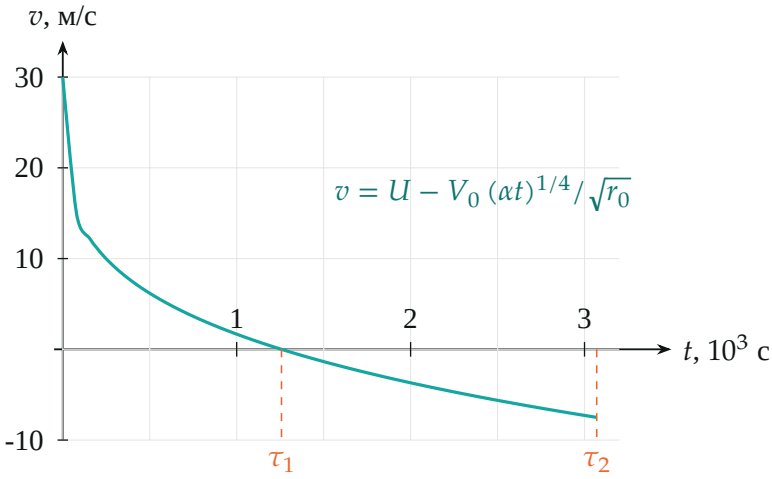
2.4. Радиус при возвращении на нижнюю границу. Капля вернётся к нижнему краю облака, когда $z(\tau_2) = 0$, то есть скобка в $z(t)$ обратится в нуль:

$$\frac{4}{5}\,\frac{V_0}{U}\Big(\frac{\alpha\tau_2}{r_0^2}\Big)^{1/4} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\alpha\tau_2}{r_0^2} = \Big(\frac{5U}{4V_0}\Big)^4.$$

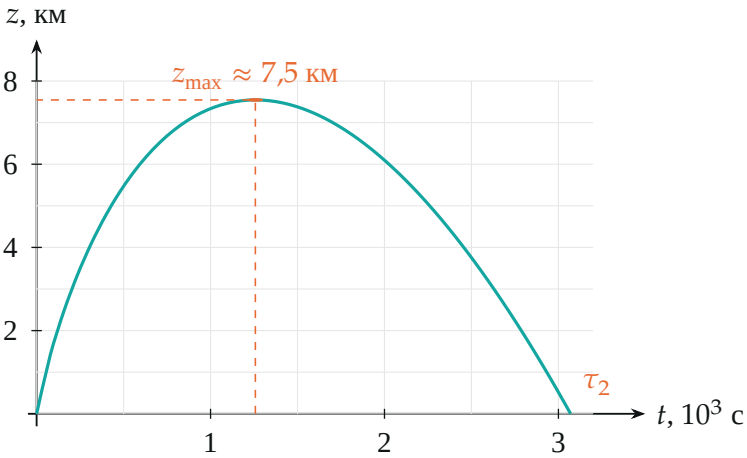
Так как $\alpha\tau_2 = r_m^2$ (закон (6) верен и при падении), получаем

$$r_m = r_0\Big(\frac{5U}{4V_0}\Big)^2 = 1{,}0\ \text{мм}\cdot\Big(\frac{5\cdot30}{4\cdot6{,}8}\Big)^2 \approx 30\ \text{мм},$$

а время возвращения $\tau_2 = r_m^2/\alpha \approx 3{,}1 \cdot 10^3$ с $\approx$ 51 мин. Это градина диаметром 6 см, нечасто, но такие бывают.



Скорость капли относительно земли: сначала равна скорости потока U (радиус ещё мал), затем убывает, в τ_1 меняет знак, дальше капля падает.



Высота капли над нижним краем облака: подъём до $z_{\max}$ за $\tau_1 \approx 1{,}26 \cdot 10^3$ с и возвращение к нижней границе в момент $\tau_2 \approx 3{,}07 \cdot 10^3$ с.

Проверка. Размерности: $V = \sqrt{\rho_0 g r/(\rho)}$ имеет размерность $\sqrt{\text{м}^2/\text{с}^2}$, т. е. скорости; r_0^2/α — $\text{м}^2/(\text{м}^2/\text{с}) = \text{с}$. Второй способ для пункта 2.3: подстановка $t = \tau_1$ в $z(t)$ даёт ту же $z_{\max} = U\tau_1/5$, а $z(\tau_2) = 0$ даёт $\tau_2 = \tau_1(5/4)^4$, и $r_m = r_s \cdot (5/4)^2$ — радиус при возвращении в 1,56 раза больше радиуса остановки ($19 \cdot 1{,}56 \approx 30$ мм), согласуется. Предел: при $U \to V_0$ капля вообще не поднимается: $r_s \to r_0$, $\tau_1 \to r_0^2/\alpha$.

Ответ. 1.2) $v_{\text{кр}} = \dfrac{12\eta}{C_x \rho r} \approx 0{,}38$ м/с; 1.3) формула (2): $v \gg v_{\text{кр}}$; 1.5) $V_0 = \sqrt{\dfrac{8\rho_0 g}{3C_x\rho} r_0} \approx 6{,}8$ м/с; 1.6) $\Delta t = \dfrac{H}{V_0}\left(1 - \sqrt{\dfrac{r_0}{r_2}}\right) \approx 73$ с; 1.7) $z(t) = V_0 t - \dfrac{V_0 \gamma t^2}{4}$; 2.1) $v = U - V_0 \approx 23$ м/с; 2.2) $r_s = r_0\left(\dfrac{U}{V_0}\right)^2 \approx 19$ мм; 2.3) $\tau_1 = \dfrac{r_0^2}{\alpha}\left(\dfrac{U}{V_0}\right)^4 \approx 1{,}3 \cdot 10^3$ с (21 мин), $z_{\max} = \dfrac{U\tau_1}{5} \approx 7{,}5$ км; 2.4) $r_m = r_0\left(\dfrac{5U}{4V_0}\right)^2 \approx 30$ мм.