Необычные пленки!?

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2025/26, 10 класс, задача 2] *Не нравятся длинные условия? Тогда думайте сами!*

В задании рассматриваются свойства двух типов пленок с необычными свойствами. Отметим, что свойства различных веществ определяются их энергетическими характеристиками, а именно зависимостью внутренней энергии от объема и температуры.

Часть 1. Пленка №1.

Изучим свойства тонкой почти невесомой пленки, внутренняя энергия которой пропорциональна ее площади и не зависит от температуры

$$U = aS, \qquad (1)$$

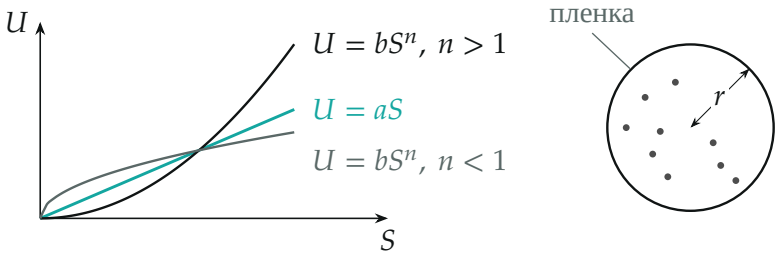
где a — постоянный известный коэффициент. Внутренняя энергия пленки от температуры явно не зависит.

1.1. Чему равна площадь пленки в свободном состоянии?

Из пленки вырезали полоску длиной l и шириной h, для использования ее в качестве пружины. Пленку растягивают вдоль длинной стороны.

1.2. Найдите зависимость силы упругости, возникающей в пленке от ее удлинения Δl, если ее ширина h при растяжении не изменяется.

Из пленки изготовили шар, заполненный одним молем одноатомного идеального газа, и поместили в условия, когда внешнее давление отсутствует (например, отправили в космос).



Поясняющий рисунок: энергия пленки по законам (1) и (2) и шар с газом в вакууме

1.3. Найдите зависимость радиуса шара от давления газа внутри него.

1.4. Найдите зависимость радиуса шара от температуры газа внутри него.

1.5. Найдите теплоемкость шара вместе с газом внутри.

1.6. Какая известная Вам пленка обладает рассмотренными свойствами?

Часть 2. Пленка №2.

Потенциальная энергия пленки зависит от ее площади по закону

$$U = bS^n, \qquad (2)$$

где b — известный коэффициент, показатель степени $n > 0$, и явно не зависит от температуры. Из пленки изготовили шар, заполненный одним молем одноатомного идеального газа, и поместили в условия, когда внешнее давление отсутствует (например, отправили в космос).

2.1. Найдите теплоемкость газа внутри шара.

Так уж и быть — поможем! Для расчета сил и давлений удобно использовать простой принцип: работа силы (подумайте какой) равна изменению энергии (подумайте, чего). Помогло? Тогда воспользуйтесь еще одной математической формулой. Если $y = x^n$, то при малых Δx (и любых n)

$$\Delta y = nx^{n-1}\,\Delta x.$$

▲ **Решение.** **Что происходит.** У пленки нет упругости в привычном смысле — у неё есть только энергия $U(S)$, зависящая от площади. Сила, с которой пленка сопротивляется, находится одним приёмом: сдвигаем границу на малое расстояние, работа силы равна изменению энергии пленки. В шаре роль такой силы играет давление газа: газ раздувает пленку, его работа $P\,\Delta V$ целиком идёт на рост энергии пленки (пленка невесомая, снаружи вакуум, процесс медленный). Радиус шара связывает с температурой уравнение Менделеева–Клапейрона.

Обозначения. S — площадь пленки (у шара $S = 4\pi r^2$), r — радиус шара, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, P и T — давление и температура газа, R — газовая постоянная; газ одноатомный, поэтому его внутренняя энергия $U_\text{г} = \frac{3}{2}RT$. Коэффициенты $a > 0$, $b > 0$. Под теплоёмкостью понимаем отношение

подведённой к газу теплоты δQ к изменению его температуры ΔT.

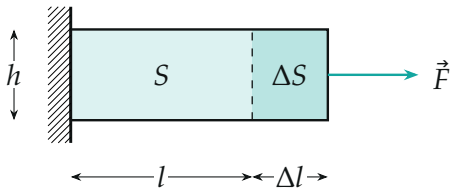
Часть 1. Пленка №1.

1.1. Свободная пленка. Система стремится к минимуму потенциальной энергии. Энергия $U = aS$ при $a > 0$ наименьшая при $S = 0$: свободная пленка стягивается в точку, $S_0 = 0$. У пленки нет собственных размеров, в отличие от пружины с длиной недеформированного состояния.

1.2. Сила упругости полоски. Растягиваем полоску медленно, поэтому сила упругости пленки равна по модулю внешней силе F. При удлинении на малое Δl площадь растёт на $\Delta S = h\,\Delta l$ (ширина h не меняется). Работа внешней силы $F\,\Delta l$ идёт на рост энергии пленки:

$$F\,\Delta l = \Delta U = a\,\Delta S = ah\,\Delta l \quad \Rightarrow \quad F_{\text{упр}} = ah.$$

Сила не зависит от удлинения: график $F(\Delta l)$ — горизонтальная прямая, а не наклонная, как у пружины Гука.



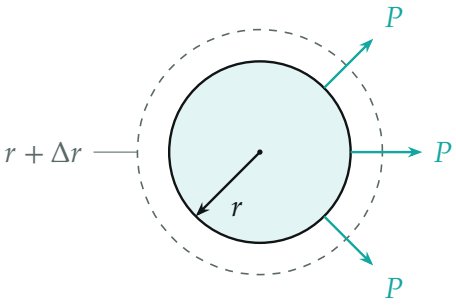
Растяжение полоски внешней силой $\vec{F}$: добавленная площадь $\Delta S = h\,\Delta l$ (тёмная полоса) увеличивает энергию на $a\,h\,\Delta l$

1.3. Давление в шаре. Пусть газ медленно раздул шар на малую величину Δr. Из формул для шара

$$\Delta V = 4\pi r^2\,\Delta r, \qquad \Delta S = 8\pi r\,\Delta r.$$

Работа газа $P\,\Delta V$ идёт на рост энергии пленки $a\,\Delta S$:

$$P \cdot 4\pi r^2\,\Delta r = a \cdot 8\pi r\,\Delta r \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2a}{r}, \qquad r = \frac{2a}{P}.$$



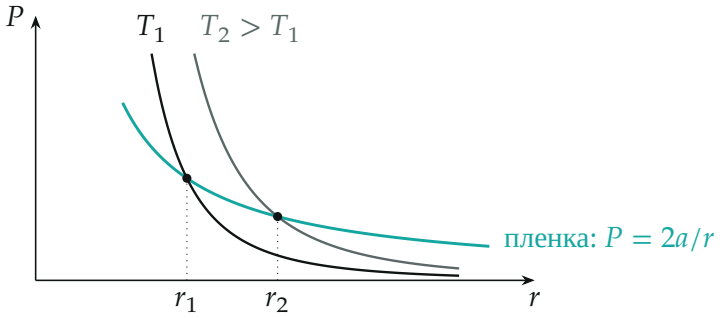
Шар радиуса r раздули до $r + \Delta r$ (пунктир): давление газа действует на пленку изнутри

Обратите внимание: давление определяет только пленка, оно зависит лишь от r (чем меньше шар, тем оно больше), а не от температуры и числа молей газа.

1.4. Радиус и температура. Газ в шаре подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона для одного моля, $PV = RT$. Подставим $P = 2a/r$ из 1.3:

$$\frac{2a}{r}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = RT \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{3}\pi a\, r^2 = RT \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt{\frac{3RT}{8\pi a}}.$$

Радиус растёт как корень из температуры.



Равновесные состояния: пересечения гиперболы пленки $P = 2a/r$ с изотермами газа $P = 3RT/(4\pi r^3)$; при нагреве $T_1 \to T_2$ равновесный радиус растёт $r_1 \to r_2$

1.5. Теплоёмкость шара с газом. Подведённая теплота идёт на рост внутренней энергии газа и на работу газа против пленки. Эта работа есть рост энергии пленки: по пункту 1.3 $P\,\Delta V = a\,\Delta S$. Выразим энергию пленки через температуру, подставив радиус из 1.4:

$$U_{\text{пл}} = aS = 4\pi a r^2 = 4\pi a \cdot \frac{3RT}{8\pi a} = \frac{3}{2}RT.$$

Значит, $P\,\Delta V = \Delta U_{\text{пл}} = \frac{3}{2}R\,\Delta T$. Первое начало термодинамики:

$$\delta Q = \frac{3}{2}R\,\Delta T + P\,\Delta V = \frac{3}{2}R\,\Delta T + \frac{3}{2}R\,\Delta T \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = 3R.$$

Проверка: независимо $PV = \frac{8}{3}\pi a r^2$, а $U_{\text{пл}} = 4\pi a r^2$, откуда $U_{\text{пл}} = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}RT$, как и выше. Теплоёмкость вдвое больше, чем у самого газа ($\frac{3}{2}R$): половина теплоты уходит в пленку.

1.6. Какая это пленка. Энергия, пропорциональная площади и не зависящая от температуры, давление $P = 2a/r$, постоянная сила на единицу ширины — это мыльная пленка (поверхностное натяжение). У пузыря две поверхности, поэтому $a = 2\sigma$, и $P = 2a/r = 4\sigma/r$ — формула Лапласа для мыльного пузыря.

Часть 2. Пленка №2.

Приём тот же. Работа газа при малом расширении равна изменению энергии пленки, $P\,\Delta V = \Delta U$. По формуле из условия при $y = S$:

$$\Delta U = b\,\Delta(S^n) = nbS^{n-1}\,\Delta S, \qquad \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{8\pi r}{4\pi r^2} = \frac{2}{r},$$

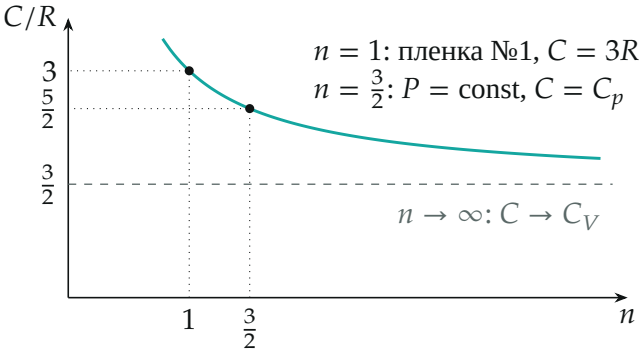
$$P\,\Delta V = \Delta U \;\Rightarrow\; P = \frac{2nb\,S^{n-1}}{r}.$$

При $n = 1$, $b = a$ это совпадает с $P = 2a/r$ из 1.3. Связь температуры с площадью — через $PV = RT$:

$$T = \frac{PV}{R} = \frac{2nbS^{n-1}}{rR} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{2n}{3R}\,bS^n \quad \Rightarrow \quad U_{\text{пл}} = bS^n = \frac{3R}{2n}\,T.$$

Энергия пленки пропорциональна температуре газа: $\Delta U_{\text{пл}} = \dfrac{3R}{2n}\Delta T$. Подведённая к газу теплота:

$$\delta Q = \frac{3}{2}R\,\Delta T + P\,\Delta V = \frac{3}{2}R\,\Delta T + \Delta U_{\text{пл}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{2}R + \frac{3R}{2n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{n+1}{n}R.$$



Теплоёмкость газа в шаре $C/R = \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$: три контрольные точки проверки

Проверка. Три контрольные точки (рисунок). (1) $n = 1$: $C = 3R$ — как в 1.5, пленка №1 есть частный случай. (2) $n = \frac{3}{2}$: энергия $U_{\text{пл}} = bS^{3/2} \propto r^3 \propto V$, значит, $P = \Delta U/\Delta V$ постоянно и газ расширяется изобарно; для одноатомного газа $C_p = \frac{5}{2}R$, а формула при $n = \frac{3}{2}$ даёт $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}R = \frac{5}{2}R$. (3) $n \to \infty$: пленка практически не растягивается, работы нет, $C \to C_V = \frac{3}{2}R$.

Смысл: на нагрев газа уходит $\frac{3}{2}R$, а в пленку — ещё $\frac{3R}{2n}$; чем круче растёт энергия пленки с площадью (больше n), тем меньше теплоты уходит в раздувание шара.

Ответ. 1.1) $S_0 = 0$; 1.2) $F_{\text{упр}} = ah$, не зависит от Δl; 1.3) $r = 2a/P$ (то же, что $P = 2a/r$); 1.4) $r = \sqrt{3RT/(8\pi a)}$; 1.5) $C = 3R$; 1.6) мыльная пленка; 2.1) $C = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}R$.