Космический вальс

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2025/26, 10 класс, задача 3] *В классическом вальсе партнеры кружатся вокруг друг друга и одновременно движутся по кругу. В космическом вальсе — Земля и Луна вращаются вокруг общей оси и медленно движутся вокруг Солнца! Оставим задачу о физике вальса на будущее, разберемся с более простой физической задачей о одной пары: Луны и Земли.*



Для упрощения будем считать, что траектории движения этих тел лежат в одной плоскости, все орбиты круговые, Земля имеет форму идеального шара.

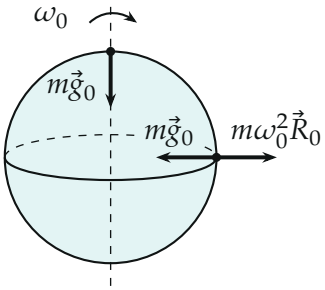
Примем во внимание, что в характеристиках движения Земли есть очень «странные совпадения»: период вращения Земли вокруг своей оси равен точно одним суткам, период обращения вокруг Солнца в точности равен одному году, период обращения Луны вокруг Земли равен месяцу (правда, примерно). И еще один неожиданный факт — расстояние от Земли до Луны — одна световая секунда. Правда, сейчас, в век искусственного интеллекта, помнить эти данные и не обязательно — всегда можно спросить у Алисы (если нет интеллекта своего).

В конце данного задания приведены (округленно) значения параметров рассматриваемой пары тел, которые могут понадобиться при решении задачи. Рекомендуем добавить в таблицу значения угловых скоростей вращения рассматриваемых тел. Жюри это оценит.

Небольшие подсказки.

1. При описании движения во вращающейся системе отсчета (которая является неинерциальной), вместо перехода в инерциальную систему, удобно ввести центробежную силу. Эта сила, действующая на любое тело, по модулю равна $m\omega^2 r$ (m — масса тела, ω — угловая скорость

вращения системы отсчета относительно какой-либо инерциальной системы, r — расстояние до оси вращения). Сила направлена по прямой перпендикулярной оси вращения от нее, радиально. Обозначайте эти силы «со звездочкой» — F^*. Впрочем, еще А. Эйнштейн показал, что эта сила, как и другие силы инерции, принципиально неотличимы от гравитационных сил, или гравитационные силы… тоже силы инерции.



2. Во всех частях задачи рекомендуем произведение гравитационной постоянной на массу центрального тела GM выразить через кинематические характеристики — угловые скорости и радиусы орбит.

3. Математическая подсказка. В данной задаче много малых величин, поэтому рекомендуем использовать различные обоснованные приближения. В частности известную формулу, справедливую при малых $x < 1$. Для любого показателя степени n (целого, дробного, положительного, отрицательного и даже комплексного…) можно использовать выражение

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x^1 + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

в этой формуле каждое следующее слагаемое меньше предыдущего, поэтому можно оставлять столько слагаемых, сколько Вы посчитаете необходимым.

Часть 1. Одинокая Земля.

В этой части рассмотрим один эффект, связанный с вращением Земли вокруг своей оси. Влиянием Луны, Солнца, комет и туманности Андромеды пренебрегаем. Обозначим ускорение свободного падения, обу-

словленное только гравитационным притяжением g_0 (назовем его гравитационным). Это ускорение свободного падения на абсолютно неподвижной Земле.

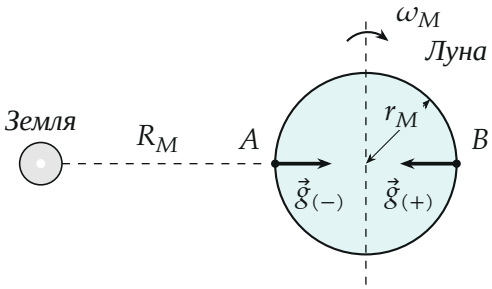
Некоторым известно, что ускорение на экваторе Земли меньше, чем на полюсах. Почему бы этим не воспользоваться спортсменам прыгунам в высоту? Допустим, спортсмен прыгает на полюсе Земли на высоту 2 метра.

1.1. Рассчитайте, на сколько увеличится высота прыжка (при той же начальной вертикальной скорости) на экваторе по сравнению с высотой прыжка на полюсе.

Часть 2. Взгляд с Луны.

В этой части рассмотрим влияние Земли на ускорение свободного падения на Луне. Луна повернута к Земле все время одной стороной. Вращение Земли и Луны вокруг Солнца не учитывать.





2.1. Рассчитайте гравитационное ускорение на поверхности Луны g_M.

2.2. Рассчитайте численное значение отношения силы притяжения некоторого тела на поверхности Луны к Земле к силе тяжести на Луне $\frac{F_E}{mg_M}$.

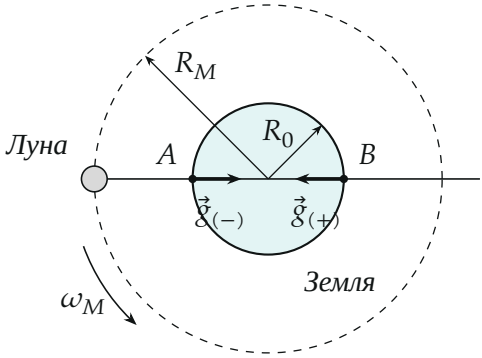
2.3. Рассмотрим две точки на поверхности Луны на ее экваторе: в точке A, для которой Земля находится в зените, и противоположную точку B (Земля в надире). Величины, относящиеся к точке A, будем обозначать индексом $(+)$, а к точке B — $(-)$. Рассчитайте относительную разность ускорений свободного падения в точках A и B $\varepsilon_{Mg} = \frac{g_{(+)} - g_{(-)}}{g_M}$, обусловленную только гравитационным притяжением к Земле.

2.4. Рассчитайте это же отношение с учетом движения Луны вокруг Земли (т.е. с учетом центробежных сил).

Часть 3. Взгляд с Земли.

О Солнце можно забыть — точнее, пренебречь его влиянием! Опять рассматриваем две точки на поверхности Земли, находящиеся на одной прямой с Луной: A — Луна в зените, B — Луна в надире.





3.1. Рассчитайте численное значение отношения силы притяжения к Луне и силы тяжести для тела, находящегося на поверхности Земли $\frac{F_{GM}}{mg_0}$. Пренебрежем движением Земли (т.е. будем ее считать абсолютно неподвижной).

3.2. Рассчитайте относительную разность ускорений свободного падения, обусловленную только гравитационным притяжением к Луне $\varepsilon_{GM} = \frac{g_{(+)} - g_{(-)}}{g_0}$.

А теперь вспомним, как кружатся партнеры в Вальсе — они движутся оба!

3.3. Укажите, вокруг какой точки вращаются Луна и Земля.

3.4. Рассчитайте относительную разность ускорений свободного падения, обусловленную не только гравитационным притяжением к Луне $\varepsilon_{GM} = \frac{g_{(+)} - g_{(-)}}{g_0}$, но и движением Земли вокруг Луны.

Справочные данные (используйте в решении указанные обозначения

этих величин).

Гравитационное ускорение на поверхности Земли	g_0	9,80	м/с^2
Гравитационное ускорение на поверхности Луны	g_M		
Радиус Земли	R_0	$6{,}40 \cdot 10^6$	м
Радиус Луны	r_M	$1{,}74 \cdot 10^6$	м
Расстояние до Луны	R_M	$3{,}00 \cdot 10^8$	м
Сутки	T_0	24,0	час
Угловая скорость вращения Земли	ω_0		
Лунный месяц	T_M	27,3	сут
Угловая скорость Луны	ω_0		
Отношение массы Луны к массе Земли	η	$1{,}23 \cdot 10^{-2}$	

▲ **Решение. Что происходит.** Ускорение свободного падения на поверхности тела складывается из притяжения самого тела, притяжения соседа и силы инерции (по подсказке 1 — центробежной). Последние два вклада малы, их считаем поправками: $(1+x)^n \approx 1+nx$. Главная идея частей 2 и 3: притяжение соседа и центробежная сила меняются вдоль линии «центр — точка» почти одинаково, и в разности ускорений в двух противоположных точках главные слагаемые сокращаются. Остаётся поправка следующего порядка, поэтому ответы 2.4 и 3.4 намного меньше ответов 2.3 и 3.2.

Обозначения. $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, $\omega_M = 2\pi/T_M = 2{,}66 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$, $x_0 = r_M/R_M = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$, $y = R_0/R_M = 2{,}13 \cdot 10^{-2}$. Индекс $(+)$ — точка, где притяжение соседа добавляется к собственному (B, как на рисунках условия; по тексту условия индекс $(+)$ стоит у A, и тогда знак ответов 2.3, 2.4, 3.2, 3.4 обратный), $(-)$ — точка A.

Часть 1. Одинокая Земля.

1.1. На полюсе точка лежит на оси, $g_\text{п} = g_0$. На экваторе тело в системе Земли испытывает центробежную силу $m\omega_0^2 R_0$, направленную от оси, то есть вверх: $g_\text{э} = g_0 - \omega_0^2 R_0 = g_0(1 - \varepsilon_g)$. Высота прыжка

$h = v_0^2/(2g) \propto g^{-1}$, поэтому по формуле условия $(1-\varepsilon_g)^{-1} \approx 1+\varepsilon_g$:

$$\varepsilon_g = \frac{\omega_0^2 R_0}{g_0} = \frac{3{,}38\cdot 10^{-2}}{9{,}80} = 3{,}45\cdot 10^{-3},$$
$$\delta h = h_\text{п}\,\varepsilon_g = 2\text{ м}\cdot 3{,}45\cdot 10^{-3} = 6{,}9\cdot 10^{-3}\text{ м}.$$

Проверка: в инерциальной системе $mg_0 - N = m\omega_0^2 R_0$, вес $N = m(g_0 - \omega_0^2 R_0)$ тот же. Выигрыш — 7 мм из 2 м.

Часть 2. Взгляд с Луны.

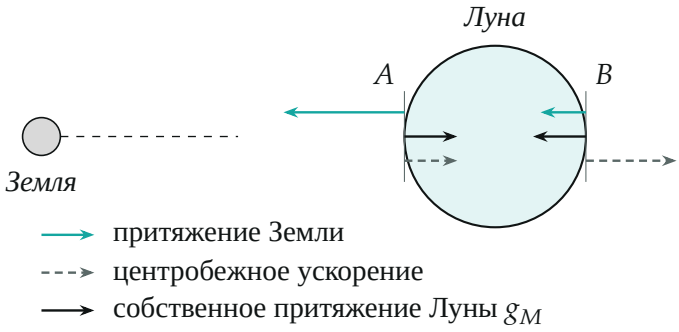
2.1. Из $g_M = GM_M/r_M^2$, $g_0 = GM_0/R_0^2$ и $M_M = \eta M_0$: $g_M = g_0\,\eta\,R_0^2/r_M^2 = 9{,}80\cdot 1{,}23\cdot 10^{-2}\cdot(6{,}40/1{,}74)^2 = 1{,}63$ м/с^2.

2.2. Пусть $a_E = GM_0/R_M^2 = g_0 R_0^2/R_M^2 = 4{,}46\cdot 10^{-3}$ м/с^2 — ускорение, которое Земля сообщает телу в центре Луны. Тогда

$$\frac{F_E}{mg_M} = \frac{a_E}{g_M} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{r_M}{R_M}\right)^2 = \frac{3{,}36\cdot 10^{-5}}{1{,}23\cdot 10^{-2}} = 2{,}7\cdot 10^{-3}.$$

2.3. Ось ξ направим от Земли, начало — в центре Луны: у B $\xi = +r_M$, у A $\xi = -r_M$. Притяжение Земли в точке ξ равно $a_E(1+x)^{-2}$, $x = \xi/R_M$, и $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - \ldots$ В точке B (Земля в надире) оно направлено вниз и прибавляется к g_M, в точке A (Земля в зените) — вверх и вычитается:

$$g_{(+)} = g_M + a_E(1 - 2x_0 + 3x_0^2), \qquad g_{(-)} = g_M - a_E(1 + 2x_0 + 3x_0^2),$$
$$\varepsilon_{Mg} = \frac{g_{(+)} - g_{(-)}}{g_M} = \frac{2a_E}{g_M}\left(1 + 3x_0^2\right) \approx \frac{2a_E}{g_M} = 5{,}5\cdot 10^{-3}.$$



Ускорения в точках A и B (масштаб условный: на рисунке $r_M/R_M = 0{,}25$, в задаче $6 \cdot 10^{-3}$); стрелки разнесены по высоте, все они лежат на линии Земля — Луна

2.4. Луна повёрнута к Земле одной стороной, значит, в системе, вращающейся вместе с ней вокруг оси через общий центр масс, её точки неподвижны, а центробежное ускорение точки на расстоянии ρ от оси равно $\omega_M^2\rho$ и направлено от Земли. Центр Луны отстоит от оси на $R_c \approx R_M$ (поправка $\eta \approx 1\%$ влияет только на линейные слагаемые, а они в разности сократятся). Второй закон Ньютона для Луны: $\omega_M^2 R_c = a_E$, поэтому центробежное ускорение точки ξ равно $a_E(1+x)$, а результирующее ускорение вдоль ξ (центробежное минус притяжение Земли) —

$$f(x) = a_E\left[(1+x) - (1+x)^{-2}\right] = a_E\left(3x - 3x^2 + 4x^3 - \dots\right).$$

В точке B направление $+\xi$ — вверх, в A — вниз: $g_{(+)} = g_M - f(x_0)$, $g_{(-)} = g_M + f(-x_0)$. Линейные слагаемые $\pm 3a_E x_0$ равны и сокращаются (вес уменьшается в обеих точках одинаково — это приливы), остаётся

$$g_{(+)} - g_{(-)} = -\left[f(x_0) + f(-x_0)\right] = 6a_E x_0^2,$$
$$\varepsilon_{Mg} = 6\,\frac{a_E}{g_M}\,x_0^2 = 6 \cdot 2{,}73 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}36 \cdot 10^{-5} = 5{,}5 \cdot 10^{-7}.$$

Обратите внимание: числа 2.2–2.4 получены по массам ($a_E = g_0 R_0^2/R_M^2$). Если по подсказке 2 взять $a_E = \omega_M^2 R_c = 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ м/с^2, они станут в 2,1 раза меньше ($1{,}3 \cdot 10^{-3}$, $2{,}6 \cdot 10^{-3}$, $2{,}6 \cdot 10^{-7}$): в таблице $R_M = 3{,}00 \cdot 10^8$ м округлено, реально $3{,}84 \cdot 10^8$ м, и тогда оба способа

дают $2{,}7 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.

Часть 3. Взгляд с Земли.

3.1. Пусть $a_M = GM_M/R_M^2$ — ускорение, которое Луна сообщает телу в центре Земли. Через $g_0 = GM_0/R_0^2$: $F_{GM}/(mg_0) = a_M/g_0 = \eta y^2 = 1{,}23 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}55 \cdot 10^{-4} = 5{,}6 \cdot 10^{-6}$.

3.2. Как в 2.3, притяжение Луны на расстоянии $R_M \mp R_0$ равно $a_M(1 \mp y)^{-2}$: в точке A (Луна в зените) оно уменьшает g, в точке B (Луна в надире) увеличивает:

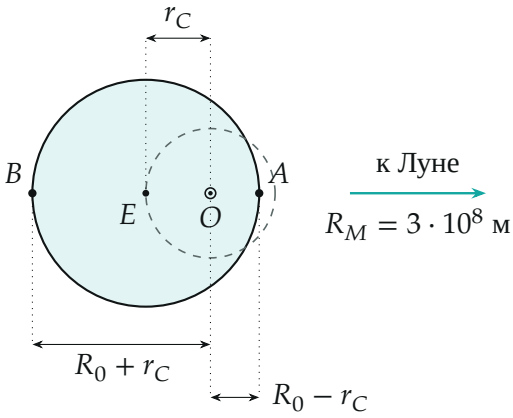
$$g_{(-)} = g_0 - a_M(1 + 2y + 3y^2), \qquad g_{(+)} = g_0 + a_M(1 - 2y + 3y^2),$$

$$\varepsilon_{GM} = \frac{g_{(+)} - g_{(-)}}{g_0} = \frac{2a_M}{g_0}\left(1 + 3y^2\right) \approx 2 \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-6} = 1{,}1 \cdot 10^{-5}.$$

3.3. Центр масс O системы делит расстояние R_M обратно пропорционально массам. Пусть он на расстоянии r_C от центра Земли:

$$M_0\, r_C = M_M\,(R_M - r_C) \;\Rightarrow\; r_C = R_M\,\frac{\eta}{1+\eta} \approx 3{,}65 \cdot 10^6 \text{ м} \approx 0{,}57\, R_0.$$

Точка O лежит внутри Земли, примерно на середине радиуса от центра в сторону Луны. Вокруг оси через O Земля и Луна обращаются с одной угловой скоростью ω_M.



Центр Земли E обращается по окружности радиуса r_C вокруг центра масс

O (пунктир), лежащего внутри Земли; радиусы в масштабе, Луна далеко справа

3.4. Центр Земли движется по окружности радиуса r_C с угловой скоростью ω_M, его ускорение $\omega_M^2 r_C$ направлено к оси, то есть к Луне. По второму закону Ньютона для Земли $M_0\omega_M^2 r_C = GM_0M_M/R_M^2$, откуда $\omega_M^2 r_C = a_M$. Центробежное ускорение точки равно $\omega_M^2\rho$, ρ — расстояние до оси O. Точка A лежит между осью и Луной, $\rho_A = R_0 - r_C$; точка B — по другую сторону от оси, $\rho_B = R_0 + r_C$; в обеих точках центробежное ускорение направлено от оси, то есть вверх. Расстояния до Луны отсчитываем от самих точек ($R_M \mp R_0$), гравитационные слагаемые прежние, как в 3.2:

$$\begin{aligned} g_{(-)} &= g_0 - a_M(1 + 2y + 3y^2) - \omega_M^2(R_0 - r_C), \\ g_{(+)} &= g_0 + a_M(1 - 2y + 3y^2) - \omega_M^2(R_0 + r_C), \\ g_{(+)} - g_{(-)} &= 2a_M\left(1 + 3y^2\right) - 2\omega_M^2 r_C = 6a_M y^2, \\ \varepsilon_{GM} &= 6\,\frac{a_M}{g_0}\,y^2 = 6 \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}55 \cdot 10^{-4} = 1{,}5 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Обратите внимание: в разности центробежных ускорений стоит смещение оси r_C, а не радиус Земли, а расстояния до Луны отсчитываются от самих точек, а не от оси. Смешав эти отсчёты, получим ошибочное значение порядка $4\eta a_M/g_0 \approx 2{,}7 \cdot 10^{-7}$.

Проверка. Численно по точным формулам без разложения: $5{,}52 \cdot 10^{-7}$ для 2.4 и $1{,}53 \cdot 10^{-8}$ для 3.4. Другой способ для Земли: в системе, движущейся вместе с центром Земли без вращения, на каждую точку действует одна и та же сила инерции $-ma_M$, и разность $a_M\left[(1 \mp y)^{-2} - 1\right]$ в A и B — те же $6a_M y^2$. По сравнению с 3.2 она упала в $3y^2 \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ раз: Земля свободно падает к центру масс вместе с Луной.

Ответ. 1) $\delta h \approx 6{,}9 \cdot 10^{-3}$ м (на экваторе выше); 2.1) $g_M \approx 1{,}63$ м/с^2; 2.2) $F_E/(mg_M) \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$; 2.3) $\varepsilon_{Mg} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-3}$; 2.4) $\varepsilon_{Mg} \approx 5{,}5 \cdot 10^{-7}$; 3.1) $F_{GM}/(mg_0) \approx 5{,}6 \cdot 10^{-6}$; 3.2) $\varepsilon_{GM} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-5}$; 3.3) вокруг общего центра масс, лежащего внутри Земли на расстоянии $r_C \approx 3{,}65 \cdot 10^6$ м от её центра (в сторону Луны); 3.4) $\varepsilon_{GM} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-8}$.