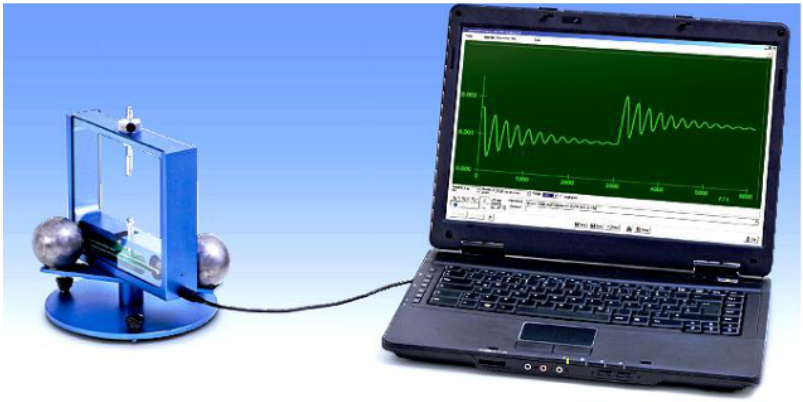
Опыт Кавендиша на современном оборудовании

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2025/26, 11 класс, задача 1]

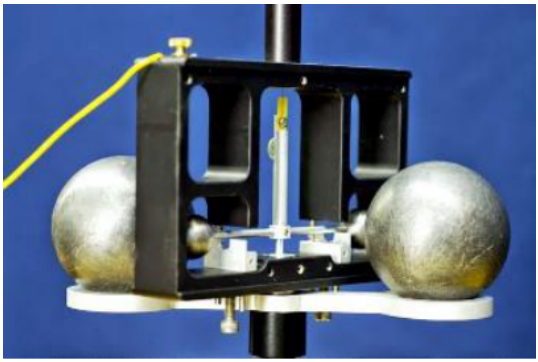
Производство приборов и оборудования для учебных целей в настоящее время является прибыльным делом. Широко известна германская фирма 3B Scientific, производящая «красивое» и дорогое оборудование для учебных лабораторий.

В данном задании Вам необходимо проанализировать результаты измерений гравитационной постоянной на установке, разработанной этой фирмой. Приведённые данные взяты из каталога приборов этой фирмы, имеющего, в том числе и рекламный характер. На фото показан общий вид этой установки.

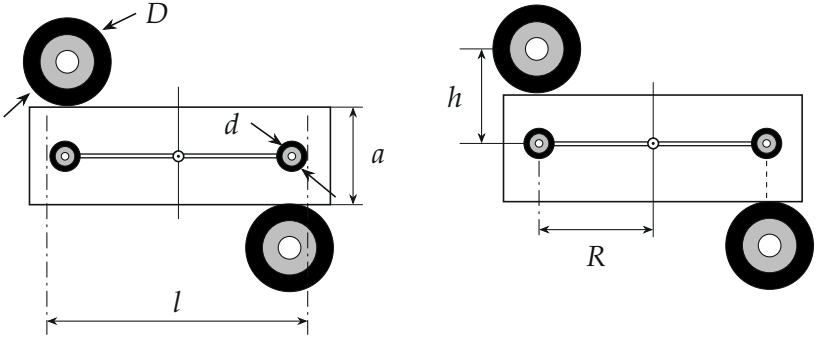


Основным её элементом (как и в опытах самого Г. Кавендиша) являются чувствительные крутильные весы. Их вид показан на следующей фотографии. На тонкой упругой вольфрамовой нити подвешено лёгкое коромысло, на концах которого закреплены два небольших свинцовых шарика. Коромысло может совершать малые крутильные колебания. Чувствительный датчик регистрирует угол поворота коромысла (с разрешающей способностью 25 микрорадиан) и выводит результаты измерений на экран компьютера, на котором отражается зависимость угла поворота коромысла от времени. Эта система помещена в стеклянный корпус (на фото он снят), чтобы избежать влияния потоков воздуха. В

положении равновесия коромысло располагается примерно вдоль оси корпуса по его средней линии. Снаружи корпуса на вращающейся подставке расположены два больших свинцовых шара. Во время измерений эти шары касаются стенок стеклянного корпуса. С помощью вращательного механизма эти шары можно приближать к корпусу в двух положениях — с одной и с другой стороны.



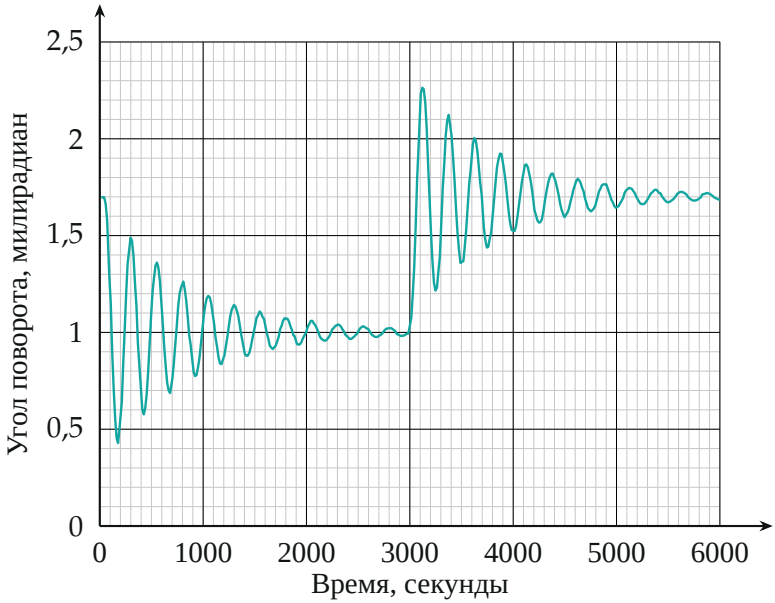
Согласно техническому описанию прибора, его параметры имеют следующие значения: массы больших шаров $M = 1{,}038$ кг; массы малых шаров $m = 0{,}0145$ кг. Массой коромысла весов можно пренебречь. Геометрические параметры: диаметры больших шаров $D = 0{,}0562$ м; диаметры малых шаров $d = 0{,}0134$ м; расстояние между стенками стеклянного корпуса $a = 0{,}0351$ м; расстояние между внешними границами малых шаров на коромысле $l = 0{,}1468$ м.



В своём решении используйте следующие геометрические величины: расстояние от оси подвеса до центра малого шара R; расстояние между центрами большого и малого шаров при касании большого шара стенки стеклянного корпуса h. Вычислите численные значения этих величин и далее используйте их в своих расчётах. Используйте приведённые здесь обозначения.

В начале эксперимента большие шары располагались на максимальном удалении от коромысла. Затем их придвинули вплотную к стенкам корпуса. Через 5 минут после начала измерений держатель больших шаров повернули примерно на 180 градусов, приблизив их вплотную к стенкам корпуса. При этом шары оказались с другой стороны относительно малых шаров.

На графике приведена полученная зависимость угла поворота коромысла от времени. Не удивляйтесь: время измерения составило в общей сложности 10 минут. Для справки: в опытах Кавендиша период колебаний коромысла был примерно равен 15 минутам. Углы отклонения приведены в милирадианах — тысячной доле радиана.



Используя приведённые данные, определите с максимальной точностью значение гравитационной постоянной.

Несмотря на то, что Вам предоставлена полная свобода действий, в изложении своего решения будьте последовательны и немногословны. Жюри ждёт от Вас научный трактат на заданную тему. Получите расчётные формулы (их вывод сопровождайте рисунками, указывайте смысл использованных Вами обозначений, аргументируйте сделанные приближения); укажите, какие физические величины должны быть получены из приведённого графика; укажите, каким способом Вы «извлекли» эти величины, приведите их численные значения, приведите окончательный результат (хотя, надеемся, что он Вам известен). Укажите основные неучтённые факторы, которые могли повлиять на окончательный результат. Помните, что надо использовать всю имеющуюся информацию, не желательно получать значения по одной экспериментальной точке! При необходимости можете использовать лист разграфлённой бумаги для построения графиков. Чётко выделяйте основные этапы работы и важные промежуточные результаты. Допускается проведение промежуточных расчётов и их дальнейшее использование.

▲ **Решение. Что происходит.** Большие шары притягивают малые, и коромысло закручивает нить: в положении равновесия момент сил тяготения уравновешен моментом упругости нити. Если большие шары перенести на другую сторону, момент меняет знак, и положение равновесия сдвигается на угол $\Delta\varphi$ — этот сдвиг и виден на графике. По сдвигу можно найти G, если известен модуль кручения нити K. А K мы найдём из того же графика: он определяет период колебаний коромысла. Главная идея задачи — выразить G только через сдвиг равновесия $\Delta\varphi$ и период T; масса m малых шаров при этом сократится.

Обозначения. φ — угол поворота коромысла (против часовой стрелки, вид сверху, как на рисунках); φ_0 — угол, при котором нить не закручена; $\bar{\varphi}_A$, $\bar{\varphi}_B$ — положения равновесия при двух положениях больших шаров (A и B); $\Delta\varphi = \bar{\varphi}_B - \bar{\varphi}_A$; K — модуль кручения нити (момент упругости равен K, умноженному на угол закручивания); I — момент инерции коромысла; T — период колебаний; N — момент сил тяготе-

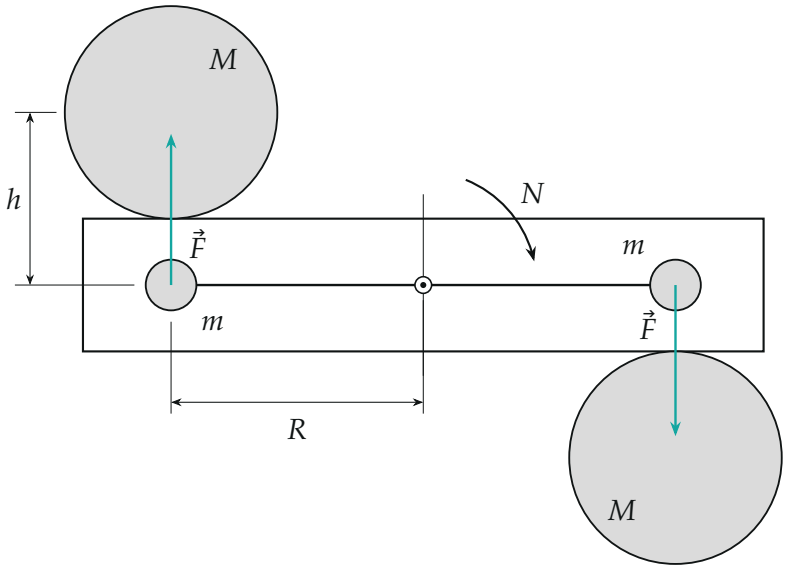
ния, действующий на коромысло.

1. Геометрия. Коромысло лежит на средней линии корпуса. Большой шар касается стенки, поэтому его центр отстоит от стенки на $D/2$, а стенка — от средней линии на $a/2$ (толщиной стекла пренебрегаем):

$$h = \frac{a + D}{2} = \frac{0{,}0351 + 0{,}0562}{2} = 4{,}565 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Расстояние l между внешними границами малых шаров — это $2R$ плюс по радиусу $d/2$ с каждого края:

$$R = \frac{l - d}{2} = \frac{0{,}1468 - 0{,}0134}{2} = 6{,}67 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$



Вид сверху, в масштабе. Сила $\vec{F}$ действует на малый шар вдоль линии центров, перпендикулярно коромыслу; обе силы вращают коромысло по часовой стрелке (положение A).

2. Момент сил тяготения. Шары однородные, поэтому притяжение к большому шару такое же, как к точке в его центре. Малый шар притя-

гивается ближним большим шаром с силой

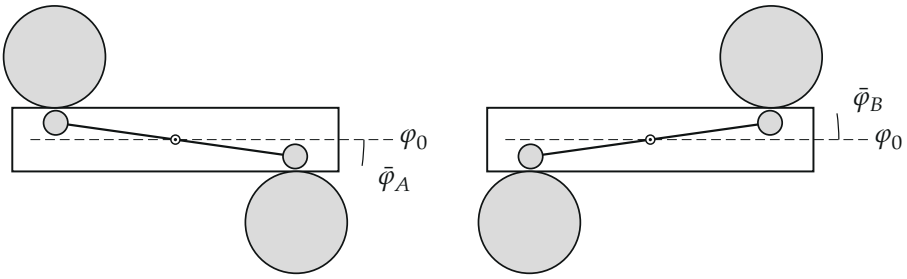
$$F = G\frac{mM}{h^2}.$$

Притяжением дальнего большого шара пренебрегаем — оценим его вклад в пункте 9. Пока коромысло поворачивается на углы порядка 10^{-3} рад, центр малого шара смещается на $R\varphi \sim 0{,}05$ мм, а это около 0,1 % от h: считаем h неизменным, а силу — перпендикулярной коромыслу. Обе силы дают момент одного знака, по модулю

$$N = 2FR = 2G\frac{mM}{h^2}R.$$

3. Равновесие и сдвиг положения равновесия. Запишем условие равновесия коромысла — сумма моментов относительно оси нити равна нулю. Нить, закрученная на угол $\varphi - \varphi_0$ от недеформированного состояния, действует моментом $-K(\varphi - \varphi_0)$. В положении A момент тяготения направлен по часовой стрелке (отрицателен), в положении B — против:

$$-N - K(\bar{\varphi}_A - \varphi_0) = 0, \qquad +N - K(\bar{\varphi}_B - \varphi_0) = 0.$$



Положения A и B (отклонение коромысла для наглядности сильно преувеличено): большие шары перенесены, момент тяготения изменил знак, равновесие сместилось от φ_0 в разные стороны.

Вычтем первое уравнение из второго:

$$K\,\Delta\varphi = 2N = \frac{4GmMR}{h^2} \quad \Rightarrow \quad G = \frac{h^2}{4mMR}\,K\,\Delta\varphi.$$

Обратите внимание: угол φ_0, при котором нить не закручена, неизвестен — по одному положению равновесия момент найти нельзя. Поэтому берём разность двух положений; она вдвое больше сдвига от нейтрального положения: $\bar{\varphi}_{A,B} = \varphi_0 \mp N/K$.

4. Модуль кручения через период. Запишем основное уравнение динамики вращения коромысла вокруг оси нити. Момент тяготения постоянен (мы считаем h неизменным) и только сдвигает положение равновесия, поэтому

$$I\ddot{\varphi} = -K(\varphi - \bar{\varphi})$$

— гармонические колебания около $\bar{\varphi}$ с периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{I/K}$ (период без трения). Массой коромысла пренебрегаем (по условию), шарики считаем точками, значит $I = 2mR^2$:

$$K = \frac{4\pi^2 I}{T_0^2} = \frac{8\pi^2 mR^2}{T_0^2}.$$

Подставим в формулу пункта 3:

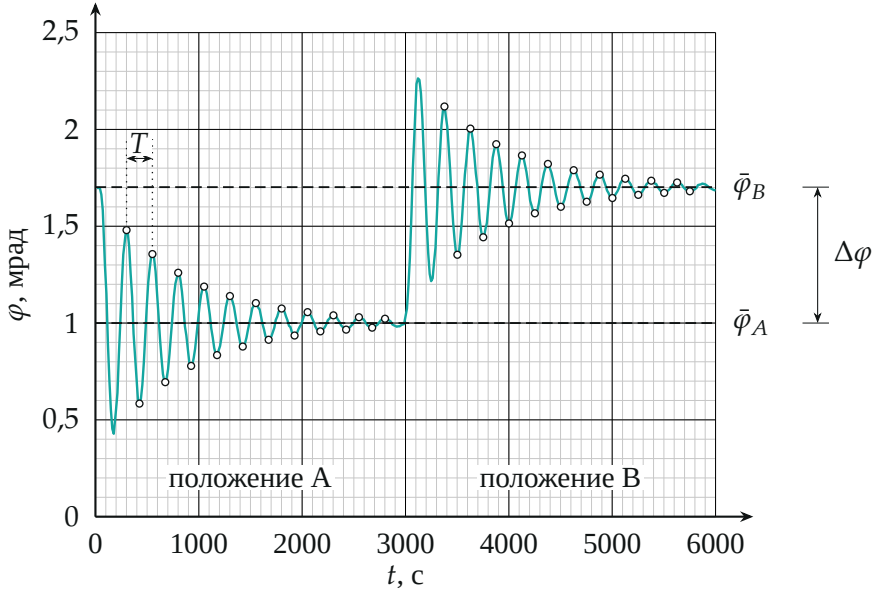
$$G = \frac{h^2}{4mMR} \cdot \frac{8\pi^2 mR^2}{T_0^2}\,\Delta\varphi = \frac{2\pi^2 Rh^2}{M\,T_0^2}\,\Delta\varphi.$$

Масса малых шаров сократилась; в формулу входят только величины, которые даны или снимаются с графика.

Колебания на графике затухающие. При затухании $e^{-t/\tau}$ частота связана с частотой свободных колебаний так: $\omega^2 = \omega_0^2 - 1/\tau^2$, откуда по периоду T, измеренному на графике,

$$\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{\tau^2}.$$

5. Что взять из графика. Нужны четыре величины: положения равновесия $\bar{\varphi}_A$, $\bar{\varphi}_B$, к которым стремятся колебания (из них $\Delta\varphi$), период T и время затухания τ (для поправки). По одной точке их находить нельзя, поэтому используем все экстремумы графика: 21 в положении A и 20 в положении B.

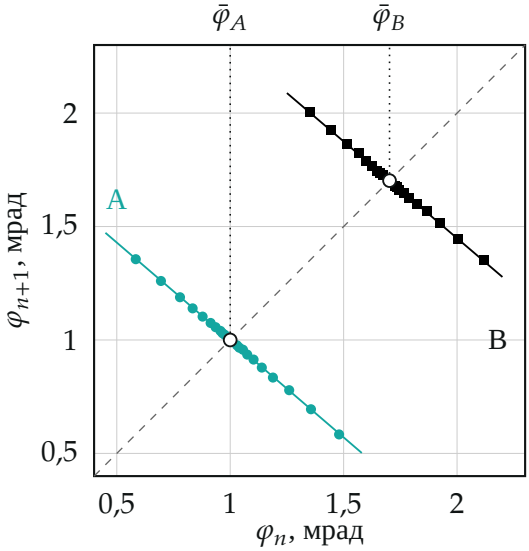


Экстремумы (кружки) сняты с графика; штриховые линии — найденные положения равновесия.

6. Положения равновесия. Колебания затухающие: $\varphi(t) = \bar{\varphi} + Ae^{-t/\tau}\cos(\omega t + \alpha)$. Соседние экстремумы лежат по разные стороны от $\bar{\varphi}$, а их отклонения от $\bar{\varphi}$ за полпериода убывают в одно и то же число раз $k < 1$:

$$\varphi_{n+1} - \bar{\varphi} = -k\,(\varphi_n - \bar{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad \varphi_{n+1} = -k\,\varphi_n + (1+k)\,\bar{\varphi}.$$

В координатах $(\varphi_n,\ \varphi_{n+1})$ все пары соседних экстремумов ложатся на одну прямую. Она пересекает биссектрису $\varphi_{n+1} = \varphi_n$ при $\varphi_n = \bar{\varphi}$ — это и есть положение равновесия. Экстремумы, снятые с графика (21 в положении A и 20 в положении B), и прямые по ним показаны на рисунке.



Прямые — линейная аппроксимация по всем парам экстремумов; точки пересечения с пунктирной биссектрисой дают $\bar{\varphi}_A$ и $\bar{\varphi}_B$.

Метод наименьших квадратов по всем парам даёт $\varphi_{n+1} = -0{,}859\,\varphi_n + 1{,}859$ для A и $\varphi_{n+1} = -0{,}853\,\varphi_n + 3{,}155$ для B. Тогда

$$\bar{\varphi}_A = \frac{1{,}859}{1 + 0{,}859} = 1{,}000 \text{ мрад}, \qquad \bar{\varphi}_B = \frac{3{,}155}{1 + 0{,}853} = 1{,}702 \text{ мрад},$$

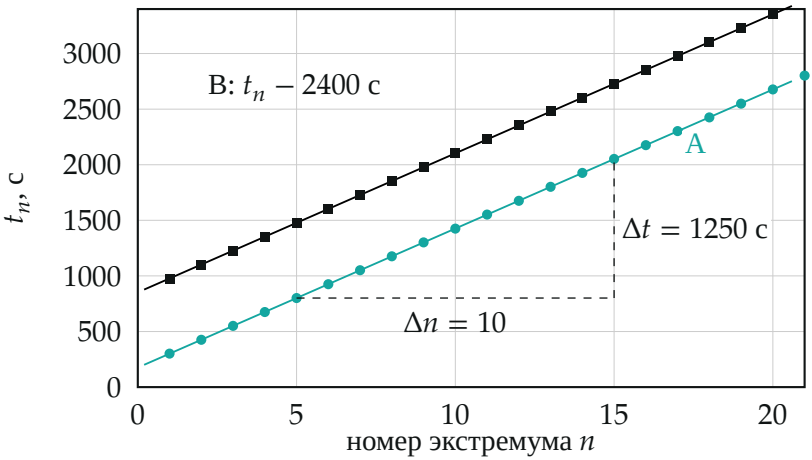
$$\Delta\varphi = \bar{\varphi}_B - \bar{\varphi}_A = 0{,}702 \text{ мрад}.$$

Проверка другими способами: по асимптотам «на глаз» — 1,00 и 1,70; по трём первым экстремумам, как делал Кавендиш, $\bar{\varphi} = \dfrac{(\varphi_1 + \varphi_3)/2 + \varphi_2}{2}$, получаем 1,001 и 1,707; по трём первым с учётом затухания, $\bar{\varphi} = \dfrac{\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3}{2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3}$, — 0,999 и 1,705. Разброс $\Delta\varphi$ между способами — в пределах 0,01 мрад, около 1,5 %.

Обратите внимание: участок вблизи $t = 3000$ с, когда шары ещё поворачивали, и начало записи в обработку не берём — момент тяготения в эти секунды не постоянен.

7. Период и затухание. Соседние экстремумы разделены полупери-

одом, поэтому время n-го экстремума линейно растёт с номером: $t_n = t_0 + n\,T/2$.



Времена экстремумов лежат на прямых; наклон — половина периода. Отклонения точек от прямых не больше 1 с.

Наклоны прямых по всем точкам: 125,03 с для A и 125,02 с для B, то есть

$$T = 2 \cdot 125{,}03\ \text{с} \approx 250{,}05\ \text{с}.$$

Отношение соседних отклонений $k \approx 0{,}856$ (среднее по обоим положениям) даёт время затухания: $k = e^{-T/(2\tau)}$, откуда

$$\tau = \frac{T}{2\ln(1/k)} \approx 8{,}0 \cdot 10^2\ \text{с}.$$

Поправка на затухание: $\dfrac{1}{T_0^2} = \dfrac{1}{T^2} + \dfrac{1}{4\pi^2\tau^2}$, откуда $T_0 \approx 249{,}7$ с (поправка около 0,14 %).

8. Результат.

$$G = \frac{2\pi^2 R h^2}{M\,T_0^2}\,\Delta\varphi = \frac{2\pi^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-2} \cdot (4{,}565 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0{,}702 \cdot 10^{-3}}{1{,}038 \cdot (249{,}7)^2},$$

$$G \approx 2{,}97 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Погрешность: $\Delta\varphi$ известен с точностью около 1,5 %, T — лучше 0,2 % (в формуле он во второй степени), геометрия — около 0,5 %; итого $G = (2{,}97 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2. Из того же графика найден модуль кручения $K = \dfrac{8\pi^2 m R^2}{T_0^2} \approx 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ Н·м/рад.

9. Неучтённые факторы.

- Притяжение дальнего большого шара. Он находится на расстоянии $d_2 = \sqrt{4R^2 + h^2} = 0{,}141$ м от ближайшего к нему малого шара, и его сила создаёт момент противоположного знака. Относительный вклад — $(h/d_2)^3 = 0{,}034$: настоящее G больше полученного примерно на 3,5 %.
- Собственный момент инерции шариков $\frac{2}{5}m(d/2)^2$ и масса коромысла: они увеличивают I, а с ним и K — ещё около +0,4 % и более.
- Внутреннее трение нити и сопротивление воздуха (учтено только через τ), медленный дрейф нуля, температурные изменения K, электростатические силы на стекле корпуса, неточность величин h и R (отличие положений шаров от идеальных), конечное разрешение датчика 25 мкрад (около 4 % от $\Delta\varphi$ для одной точки, поэтому берём все).

Перечисленные поправки в сумме дают около 4 %, то есть $G \approx 3{,}1 \cdot 10^{-11}$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{R h^2}{M T^2}$ — это м^3/(кг·с^2) = Н · м^2/кг^2, угол безразмерен. Предел: при $\Delta\varphi \to 0$ получаем $G \to 0$ — нет сдвига, нет притяжения. Второй способ: аппроксимация всего графика формулой $\varphi = \bar{\varphi} + Ae^{-t/\tau}\cos(\omega t + \alpha)$ методом наименьших квадратов даёт $\Delta\varphi = 0{,}701$ мрад, $T = 250{,}1$ с, то есть то же G. Полученное значение почти вдвое меньше табличного $6{,}67 \cdot 10^{-11}$, а найденные поправки на порядок меньше этой разницы; метод обработки здесь не виноват: он честно даёт G по тем данным и тому графику, которые заданы в условии.

Ответ. $h = \dfrac{a+D}{2} = 4{,}565 \cdot 10^{-2}$ м; $R = \dfrac{l-d}{2} = 6{,}67 \cdot 10^{-2}$ м; $G = \dfrac{2\pi^2 R h^2}{M T_0^2}\Delta\varphi \approx 3{,}0 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ (по графику $\Delta\varphi = 0{,}70$ мрад, $T = 250$ с, $T_0 = 249{,}7$ с).