Камера Вильсона

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2025/26, 11 класс, задача 2] Камера Вильсона — замечательный прибор для исследования заряженных частиц, который сыграл и до сих пор продолжает играть значительную роль в ядерной физике и физике элементарных частиц. Принцип работы камеры прост и понятен: в сосуде создаётся пересыщенный пар, парциальное давление которого превышает давление насыщенных паров. Такая система находится в метастабильном состоянии. Пролетающая заряженная частица на своём пути создаёт цепочку ионов, которые являются центрами конденсации. На них образуются микроскопические капельки воды, отмечающие траекторию пролетающей частицы, которую можно сфотографировать. Аналогичные процессы происходят и при образовании облаков. Однако до настоящего времени не всё понятно в этом процессе, особенно на его начальной стадии. Этим проблемам и посвящено это задание.

Задача разработана на основе статьи Н.Н. Гупта, С.К. Гош. Камера Вильсона и её применение в физике. УФН, 1947 г., т. XXXI, вып. 4 и книги «Физика облаков», под редакцией А.Х. Хргиана, Ленинград, 1961 г.

Справочные материалы. Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3; удельная теплота испарения воды $L = 2{,}30 \cdot 10^6$ Дж/кг; удельная теплоёмкость воды $c = 4{,}20 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); поверхностное натяжение воды $\sigma = 7{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н/м; молярная масса воды $M = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль; постоянная Авогадро $N_A = 6{,}0 \cdot 10^{23}$ 1/моль; универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К); заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл; электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Характеристики воды считать постоянными, не зависящими от температуры.

В конце задания приведена таблица зависимости давления насыщенных паров воды от температуры.

t, °C	$p_н$, кПа	$\rho_н$, $\frac{г}{м^3}$	t, °C	$p_н$, кПа	$\rho_н$, $\frac{г}{м^3}$
−20	0,103	0,85	8	1,06	8,3
−18	0,125	1,05	10	1,228	9,4
−16	0,151	1,27	12	1,402	10,7
−14	0,181	1,51	14	1,598	12,1
−12	0,217	1,80	16	1,817	13,6
−10	0,260	2,14	18	2,063	15,4
−8	0,337	2,54	20	2,338	17,3
−6	0,368	2,99	22	2,643	19,4
−4	0,437	3,51	24	2,984	21,8
−2	0,517	4,13	26	3,361	24,4
0	0,611	4,84	28	3,780	27,2
2	0,705	5,60	30	4,242	30,3
4	0,813	6,40	40	7,37	51,2
6	0,934	7,3	50	12,3	83,0

Свободная поверхность жидкости обладает энергией, равной $U = \sigma S$, где S — площадь поверхности, σ — коэффициент поверхностного натяжения. В задаче будем рассматривать камеру, рабочей средой которой является воздух с водяными парами, близкими к насыщению.

Часть 1. Проблема образования зародышей капель.

Одной из проблем теории образования капель является выяснение появления так называемых зародышей капель в чистой, без пыли, среде. Оказывается, что существует некоторый критический радиус капли, после превышения которого она начинает расти, зародышевые капли меньшего радиуса испаряются.

1.1. Покажите, что зависимость потенциальной энергии капли от её радиуса может быть представлена в виде $U(r) = -ar^3 + br^2$ (1), где a и b некоторые положительные постоянные величины. Укажите физический смысл каждого слагаемого.

1.2. Используя характеристики воды, предложите оценки коэффициентов в формуле (1).

1.3. При каком условии, накладываемом на функцию $U(r)$, капля может расти.

1.4. Используя функцию (1), оцените критический радиус капли.

Полученная оценка критического радиуса оказывается несколько заниженной, что связано с грубой оценкой коэффициентов функции (1). Поэтому далее считайте критический радиус капли равным $r_{кр} = 10$ нм.

1.5. Рассчитайте число молекул воды в капле воды радиуса $r_{кр}$. Оценки показывают, что даже уже на таких пространственных масштабах каплю можно считать сплошной средой, потерявшей «атомарную» структуру.

1.6. Получите точную формулу для электрической энергии заряженного проводящего шара радиуса R, несущего электрический заряд q.

Рассмотрим зародышевую каплю, образовавшуюся на однозарядном (т.е. её заряд равен заряду электрона) ионе. Можно считать, что капля является проводящим шариком.

1.7. Добавьте в функцию (1) слагаемое, учитывающее электрическую энергию капли. Покажите на качественном уровне (лучше это сделать графически), что наличие этой энергии может приводить к уменьшению критического радиуса капли. Численные оценки в этом пункте не требуются.

Часть 2. Внешние условия.

В Части 1 были оценены условия, при которых капля может расти. Однако для её роста необходимо, чтобы молекулы воды, находящиеся в газообразном состоянии, постоянно подходили к поверхности капли.

Известно, это было установлено ещё У. Томсоном (лордом Кельвином), что давление насыщенных паров вблизи искривлённой поверхности жидкости отличается от давления насыщенных паров вблизи плоской поверхности, причём у выпуклых поверхностей (как у капли) оно больше, а у вогнутых (как у мениска) оно меньше.

У. Томсон получил формулу (сейчас её выводят на первом курсе фи-

зического факультета), описывающую это давление

$$\ln \frac{P_r}{P_\infty} = \frac{2\sigma}{r} \frac{M}{RT\rho}, \qquad (2)$$

где P_r — давление насыщенного пара у поверхности капли радиуса r, P_∞ — давление насыщенного пара у плоской границы (именно его приводят в справочниках), M — молярная масса воды, ρ — её плотность, R — универсальная газовая постоянная, σ — поверхностное натяжение воды.

2.1. Рассчитайте избыточное давление насыщенного пара у капелек критического радиуса $r_{\text{кр}} = 10$ нм при температуре 20 °C.

2.2. Пусть влажный воздух с насыщенным паром находится в камере Вильсона при температуре 20 °C. Оцените, на сколько градусов надо резко (например, путём адиабатического расширения) охладить этот воздух, чтобы начался процесс роста капель радиуса $r_{\text{кр}} = 10$ нм. Оцените влажность воздуха в этом случае.

Можно заметить, что в формулу Томсона (2) входит лапласовское давление под искривлённой поверхностью. Это наблюдение может помочь проанализировать влияние заряда капли на избыточное давление пара у поверхности капли. Действительно, заряд капли уменьшает давление внутри неё, т.е. как бы уменьшает лапласовское давление.

2.3. Используя формулу для поверхностной энергии поверхности воды, получите формулу для избыточного давления под искривлённой поверхностью (формулу Лапласа).

2.4. Получите формулу для давления электрического поля на поверхность заряженного проводящего шара радиуса R, если его заряд равен q.

2.5. По-прежнему рассматриваем капельку воды радиуса $r_{\text{кр}} = 10$ нм. Рассчитайте, какой заряд надо сообщить этой капле (при температуре 20 °C), чтобы начался её рост в атмосфере насыщенного пара (без пресыщения).

▲ **Решение. Что происходит.** Новая фаза — капля — выигрывает энергию в объёме (молекулы переходят из пара в жидкость) и проигрывает на поверхности (она требует энергии). У маленькой капли поверхност-

ное слагаемое больше, и капля испаряется; у большой выигрыш в объёме побеждает, и капля растёт. Граница — критический радиус. Вторая половина задачи: молекулы к капле приходят из пара, а над выпуклой поверхностью насыщенный пар плотнее, чем над плоской (формула Томсона), поэтому нужно пересыщение. Заряд капли действует как отрицательное лапласовское давление и пересыщение уменьшает. Главная идея обеих частей — сравнение двух слагаемых: поверхностного и объёмного, а потом лапласовского и электрического давлений.

Часть 1. Зародыши капель.

1.1. Отсчитаем потенциальную энергию от состояния, когда те же молекулы находятся в паре. При конденсации объёма $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ воды выделяется теплота $L\rho V$ — на столько энергия молекул в капле ниже, чем в паре: объёмное слагаемое отрицательно и растёт как r^3. Поверхность капли имеет энергию $\sigma S = 4\pi\sigma r^2$ — слагаемое положительное и растёт как r^2. Поэтому

$$U(r) = -ar^3 + br^2, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

Слагаемое $-ar^3$ — энергия связи молекул (выигрыш при конденсации), br^2 — поверхностная энергия.

1.2. Приравняем слагаемые к их выражениям из 1.1 (теплота L — на единицу массы, масса капли ρV):

$$ar^3 = L\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \ \Rightarrow\ a = \frac{4}{3}\pi L\rho \approx 9{,}6 \cdot 10^9\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3},$$

$$br^2 = 4\pi\sigma r^2 \ \Rightarrow\ b = 4\pi\sigma \approx 0{,}92\ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

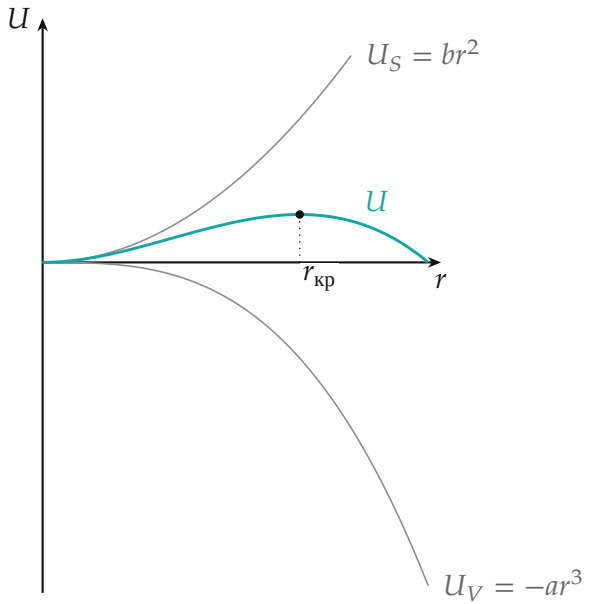
1.3. Капля может расти, если при увеличении радиуса её энергия уменьшается: самопроизвольно система идёт в состояние с меньшей энергией. Условие — $\dfrac{dU}{dr} < 0$.

1.4. Функция (1) растёт при малых r (доминирует br^2) и убывает при больших (доминирует $-ar^3$), значит, у неё есть максимум; левее него

капля испаряется, правее — растёт. Приравняем производную нулю:

$$\frac{dU}{dr} = -3ar^2 + 2br = 0 \;\Rightarrow\; r_{\text{кр}} = \frac{2b}{3a} = \frac{2\sigma}{\rho L} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-11}\ \text{м}.$$

Обратите внимание: это меньше размера молекулы ($\sim 3 \cdot 10^{-10}$ м), то есть оценка сильно занижена (в условии она названа «завышенной» — по-видимому, оговорка). Причина — в a: в насыщенном паре конденсация не даёт выигрыша $L\rho V$ (при равновесии с паром свободные энергии фаз равны); реальный выигрыш — порядка $\rho RT \ln(P/P_\infty)\, V/M$, он определяется пересыщением. Если взять пересыщение 11 % (оно появится в части 2), получится именно ≈ 10 нм.



Слагаемые энергии капли без заряда и их сумма U (бирюзовая) с максимумом при $r_{кр}$.

1.5. Масса капли $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_{\text{кр}}^3$, число молей — масса, делённая на M:

$$N = \frac{\frac{4}{3}\pi r_{\text{кр}}^3 \rho}{M} N_A = \frac{4{,}19 \cdot 10^{-24} \cdot 10^3}{1{,}8 \cdot 10^{-2}} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{23} \approx 1{,}4 \cdot 10^5.$$

1.6. Будем заряжать шар радиуса R малыми порциями dq', принося их из бесконечности. Когда на шаре уже заряд q', его потенциал $\varphi' = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$, и очередная порция требует работы $\varphi'\,dq'$. Полная работа равна энергии шара:

$$W = \int_0^q \frac{q'\,dq'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}\,q\varphi.$$

Проверка вторым способом: энергия поля вне шара $\displaystyle\int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,4\pi r^2 dr$ при $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ даёт $\dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ — то же самое (внутри проводника поля нет).

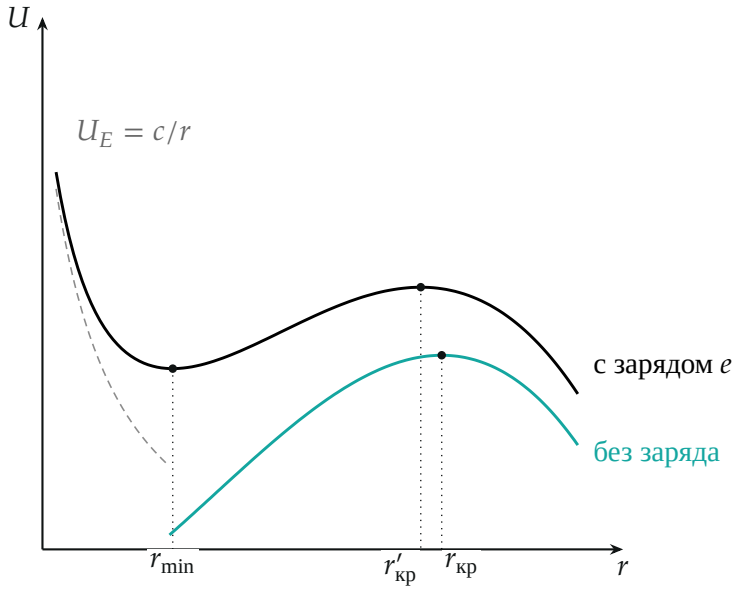
1.7. Для заряда e добавляем в $U(r)$ положительное слагаемое $\dfrac{c}{r}$:

$$U(r) = -ar^3 + br^2 + \frac{c}{r}, \qquad c = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}.$$

Найдём новый максимум:

$$\frac{dU}{dr} = -3ar^2 + 2br - \frac{c}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r^3(2b - 3ar) = c.$$

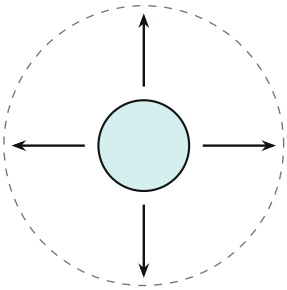
Левая часть положительна, только если $r < \dfrac{2b}{3a}$, то есть любой экстремум лежит левее прежнего $r_{\text{кр}}$. Корней два: меньший — минимум (устойчивый заряженный зародыш), больший — максимум, и он при $c \to 0$ приближается к $r_{\text{кр}}$ слева. Значит, при $c > 0$ критический радиус уменьшается — на рисунке максимум сдвинут влево. Левая часть имеет наибольшее значение $\dfrac{b^4}{16a^3}$ (при $r = \dfrac{b}{2a}$): при $c > \dfrac{b^4}{16a^3}$ корней нет, барьер исчезает совсем и заряженная капля растёт при любом r.



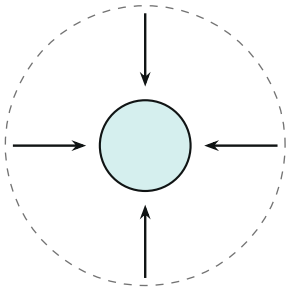
Участок вблизи максимума в увеличенном масштабе (схематично, с взято большим, чем нужно для расчёта, ради наглядности): добавка c/r сдвигает максимум суммы влево и создаёт минимум.

Часть 2. Внешние условия.

Что происходит. К капле молекулы приходят диффузией: они двигаются туда, где их концентрация (а с ней и парциальное давление пара) меньше. Если у поверхности капли давление насыщенного пара P_r больше давления пара p вдали, молекулы уходят от капли — она испаряется; если $p > P_r$ — молекулы идут к капле, и она растёт.



испаряется: $p < P_r$



растёт: $p > P_r$

Штриховая линия — область вокруг капли; стрелки — направление потока молекул.

2.1. Подставим в формулу Томсона (2) данные при $T = 293$ К:

$$\ln\frac{P_r}{P_\infty} = \frac{2\cdot 7{,}3\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}8\cdot 10^{-2}}{10^{-8}\cdot 8{,}31\cdot 293\cdot 10^{3}} \approx 0{,}108 \;\Rightarrow\; k = \frac{P_r}{P_\infty} \approx 1{,}11.$$

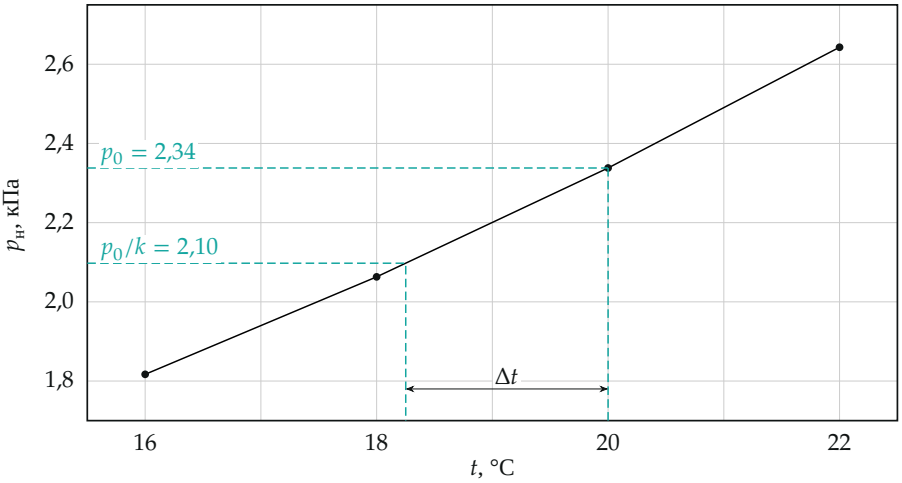
Давление насыщенного пара над плоской водой при 20 °C по таблице $P_\infty = 2{,}338$ кПа. Тогда

$$P_r = kP_\infty \approx 2{,}60 \text{ кПа}, \qquad \Delta P = P_r - P_\infty \approx 0{,}27 \text{ кПа } (\approx 11\,\%).$$

Обратите внимание: в воздухе, насыщенном по справочнику (100 %), капелька в 10 нм испаряется — вокруг неё пар «недонасыщен» по отношению к её поверхности.

2.2. Охладим воздух резко. Парциальное давление водяного пара вдали от капли остаётся $p_0 = P_\infty(20\,^\circ\text{C}) = 2{,}338$ кПа (при охлаждении на 2 К оно изменилось бы по закону Шарля лишь на 0,7 % — пренебрегаем). Капля начнёт расти, когда p_0 сравняется с P_r при новой температуре t_1: $p_0 = kP_\infty(t_1)$. Множитель k от температуры зависит слабо (показатель $\propto 1/T$), поэтому

$$P_\infty(t_1) = \frac{p_0}{k} = \frac{2{,}338}{1{,}11} \approx 2{,}10 \text{ кПа}.$$



Точки — данные таблицы, линейная интерполяция между ними; штрихи показывают p_0, p_0/k и найденную температуру. По таблице (линейная интерполяция между 18 °C: 2,063 кПа и 20 °C: 2,338 кПа)

$$t_1 = 18 + 2 \cdot \frac{2{,}10 - 2{,}063}{2{,}338 - 2{,}063} \approx 18{,}3\,^\circ\text{C} \;\Rightarrow\; \Delta t \approx 1{,}7\,^\circ\text{C}.$$

Относительная влажность после охлаждения — отношение давления пара к давлению насыщенного пара при t_1: $\dfrac{p_0}{P_\infty(t_1)} = k \approx 1{,}11$, то есть около 111 % (пересыщение 11 %).

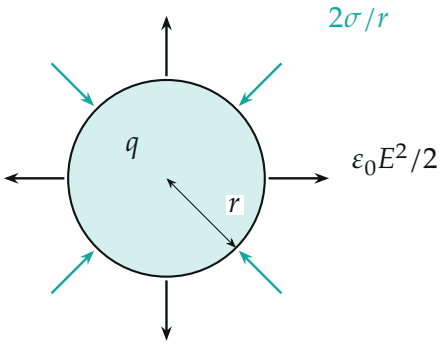
2.3. Раздуем шарик радиуса r на малое dr (внутреннее давление чуть выше внешнего на Δp). Работа сил давления идёт на увеличение поверхностной энергии:

$$\Delta p \cdot 4\pi r^2 dr = \sigma\, dS = \sigma \cdot 8\pi r\, dr \;\Rightarrow\; \Delta p = \frac{2\sigma}{r}.$$

2.4. Шар радиуса r с зарядом q (поле $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ у поверхности). Давление поля — сила на единицу площади, направленная наружу. Найдём его из энергии: заряд q постоянен, энергия $W = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$ (п. 1.6) при росте

радиуса на dr убывает, и убыль равна работе силы давления:

$$p_{\text{эл}} \cdot 4\pi r^2 dr = -dW = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr \;\Rightarrow\; p_{\text{эл}} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$



Заряженная капля: поверхностное натяжение сжимает её давлением $2\sigma/r$ (бирюзовые стрелки), электрическое поле растягивает давлением $\varepsilon_0 E^2/2$ (чёрные стрелки).

2.5. Давление пара над каплей определяется результирующим сжатием: вместо $2\sigma/r$ в формулу Томсона входит $2\sigma/r - p_{\text{эл}}$. Рост в насыщенном паре без пересыщения начнётся, когда $P_r = P_\infty$, то есть эффективное лапласовское давление исчезает:

$$\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} = \frac{2\sigma}{r} \;\Rightarrow\; q = 8\pi\sqrt{\varepsilon_0\sigma r^3},$$

$$q = 8\pi\sqrt{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot7{,}3\cdot10^{-2}\cdot10^{-24}} \approx 2{,}0\cdot10^{-17}\ \text{Кл}.$$

Это около 126 элементарных зарядов. Обратите внимание: один электрон здесь почти ничего не даёт — отношение $p_{\text{эл}}/(2\sigma/r)$ при $q = e$ порядка $6\cdot10^{-5}$.

Проверка. Размерность q: $\varepsilon_0\sigma r^3$ имеет размерность $\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\cdot\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}\cdot\text{м}^3 = \text{Кл}^2$. Размерность избыточного давления: σ/r — Н/м^2. Предел: $q \to 0$ даёт чистую формулу Томсона; чем меньше капля, тем меньший заряд

нужен ($q \propto r^{3/2}$). Второй способ для 2.5: поле у поверхности $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \approx 1{,}8 \cdot 10^9$ В/м, $\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} = 1{,}46 \cdot 10^7$ Па $= \dfrac{2\sigma}{r}$ — сходится. Этот заряд совпадает с пределом Рэлея, при котором капля неустойчива сама по себе: рост заряженной капли в насыщенном паре без пересыщения в такой модели возможен лишь на границе её устойчивости.

Ответ. 1.2) $a = \frac{4}{3}\pi L\rho \approx 9{,}6 \cdot 10^9$ Дж/м^3, $b = 4\pi\sigma \approx 0{,}92$ Дж/м^2; 1.3) $dU/dr < 0$; 1.4) $r_{\text{кр}} = \dfrac{2b}{3a} = \dfrac{2\sigma}{\rho L} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-11}$ м (занижена, далее 10 нм); 1.5) $N \approx 1{,}4 \cdot 10^5$; 1.6) $W = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$; 1.7) $U = -ar^3 + br^2 + \dfrac{c}{r}$, $c = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}$, максимум смещается к меньшим r; 2.1) $P_r/P_\infty \approx 1{,}11$, $\Delta P \approx 0{,}27$ кПа ($P_r \approx 2{,}60$ кПа); 2.2) охладить примерно на 1,7 °C, влажность около 111 %; 2.3) $\Delta p = \dfrac{2\sigma}{r}$; 2.4) $p = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \dfrac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$; 2.5) $q = 8\pi\sqrt{\varepsilon_0\sigma r^3} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-17}$ Кл.