Терморезисторы

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2025/26, 11 класс, задача 3] В электротехнике используются приборы, которые называются терморезисторы, сопротивление которых достаточно сильно зависит от температуры. Если сопротивление такого резистора возрастает с ростом температуры, такой прибор называется терморезистором с положительной характеристикой (такой резистор мы будем обозначать на схемах знаком «+»). Если сопротивление прибора уменьшается с ростом температуры, то прибор называется терморезистором с отрицательной характеристикой (на схемах будем обозначать его со знаком «−»). Для реальных приборов зависимости сопротивления от температуры носят сложный и разнообразный характер. Но в данном задании эти зависимости будем приближённо описывать линейными функциями:

$R = R_0\,(1 + \alpha t)$ — для положительной характеристики (1),

$R = R_0\,(1 - \alpha t)$ — для отрицательной характеристики (2).

Второй важной характеристикой является мощность теплоотдачи — количество теплоты, уходящей в окружающую среду в единицу времени. Будем считать, что мощность теплоотдачи пропорциональна температуре терморезистора

$$P = \beta t. \qquad (3)$$

В формулах (1)–(3) t — разность между температурой терморезистора и температурой окружающей среды. Коэффициенты в формулах R_0, α, β положительные, считайте их известными. Во всех частях задания рассматривается область температур, при которых формулы (1)–(2) дают положительные значения сопротивлений: от $t \to -\infty$ до $t = 1/\alpha$ для терморезистора с отрицательной характеристикой; от $t = -1/\alpha$ до $t \to +\infty$ для терморезистора с положительной характеристикой.

Теплоёмкость каждого терморезистора равна C и не зависит от его температуры. Считайте, что терморезистор с положительной характеристикой (1) перегорает только в том случае, когда его температура стремится к бесконечности $t \to \infty$. А терморезистор с отрицательной харак-

теристикой (2) перегорает, если его температура стремится к $t \to 1/\alpha$.

Если в цепи находится два терморезистора, то считайте, что обмен теплоты между ними не происходит.

Стационарным (установившимся) называется режим, в котором значения температур и сопротивлений терморезисторов перестают изменяться с течением времени.

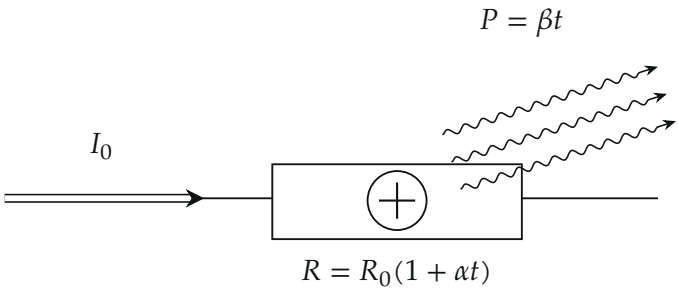
Подсказка. Решения каждой части задания рекомендуем начинать с записи уравнений, описывающих изменения температур $t_{1,2}$ за малый промежуток времени $\Delta\tau$ (обозначайте время τ, чтобы не путать с температурой t). Для этого удобно ввести «относительные» сопротивления терморезисторов $r_{1,2} = R_{1,2}/R_0$ и перейти к уравнениям, описывающим изменения сопротивлений терморезисторов, которые можно привести к виду

$$a\frac{\Delta r_{1,2}}{\Delta\tau} = F_{1,2}(r_1, r_2, p), \qquad (4)$$

где a — несущественный для данной задачи параметр, $F_{1,2}(r_1, r_2, p)$ — некоторые функции от переменных r_1, r_2 и от безразмерного параметра p, зависящего от параметров задачи R_0, α, β, U_0, I_0. Для вашего удобства во всех частях задачи этот параметр будет указан. Решать эти уравнения не следует, достаточно провести их качественный анализ и построить качественные графики требуемых зависимостей. Эти графики оцениваются по следующим критериям: начальные и предельные значения; характер зависимости — монотонность, возрастание-убывание; выпуклость — вогнутость. Все графики необходимо построить на приготовленных для вас бланках в Листах ответов. Используйте сделанную оцифровку осей координат (там, где она есть). Оси времени оцифровывать не надо. Вид построенных графиков должен быть обоснован формулами, графиками — простого угадывания недостаточно.

Часть 1. Один «положительный» терморезистор.

В данной части используйте безразмерный параметр $p = \dfrac{\alpha I_0^2 R_0}{\beta}$. Терморезистор с положительной характеристикой включён в цепь, в которой поддерживается постоянная сила тока I_0.



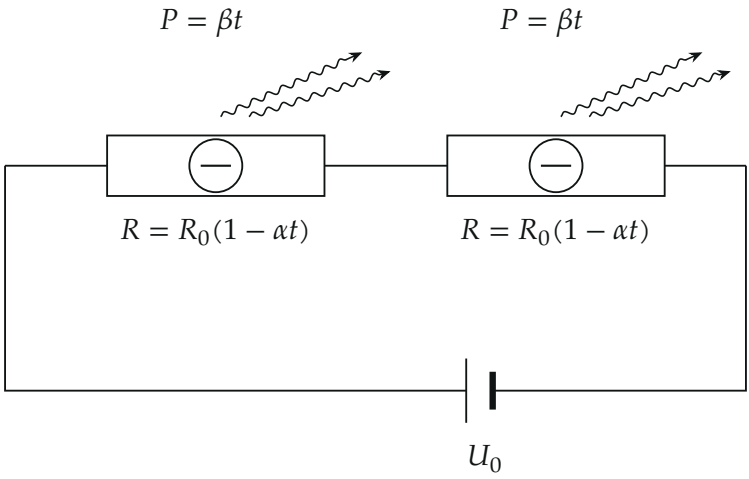
1.1. Определите максимальное значение силы тока I_0, который может протекать через резистор без его перегорания.

1.2. Запишите уравнение вида (4), описывающее изменение относительного сопротивления резистора с течением времени. Укажите значение параметра a в данном уравнении.

1.3. На бланках в Листах ответов постройте схематические графики зависимости сопротивления терморезистора от времени при указанных значениях параметра p ($p = 0{,}6$ и $p = 1{,}4$) и различных начальных (при $\tau = 0$) значениях сопротивления r_0.

Часть 2. Два «отрицательных» терморезистора.

В этой части безразмерный параметр равен $p = \dfrac{\alpha U_0^2}{4\beta R_0}$. Два одинаковых терморезистора с отрицательными характеристиками соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения U_0.



2.1. Получите уравнения, описывающие изменения относительных сопротивлений резисторов. Приведите их к виду (4). Укажите значение параметра a в этих уравнениях.

2.2. Докажите, что возможны только такие установившиеся режимы, при которых сопротивления резисторов одинаковы $r_1 = r_2$.

Рассмотрим режим протекания тока, если в начальный момент сопротивления терморезисторов одинаковы и равны r_0. В этом случае сопротивления резисторов могут изменяться с течением времени, но будут оставаться равными.

2.3. Определите, при каких значениях параметра p возможен установившийся режим протекания тока.

2.4. На бланках в Листах ответов постройте схематические графики зависимости сопротивления резисторов от времени при двух указанных значениях параметра p ($p = 0{,}2$ и $p = 0{,}3$) и различных начальных условиях.

2.5. Найдите максимальное значение напряжения источника $U_{0\,\max}$, при котором терморезисторы не перегорают. Выразите эту величину через параметры α, β, R_0.

2.6. Рассчитайте численные значения установившегося значения относительного сопротивления терморезисторов r при напряжении источника, равном $U_0 = U_{0\,\max}/2$, и при $U_0 = 0{,}50\,U_{0\,\max}$.

При совместном рассмотрении двух функций от времени (в нашем случае — это зависимости сопротивлений от времени $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$) наглядное представление о поведении этих функций даёт так называемая фазовая диаграмма. Для этого строится диаграмма, по осям которой откладывают значения одной и другой функции в некоторый момент времени. Этому состоянию соответствует точка на диаграмме. В последующие моменты времени значения функции изменяются, соответствующая им точка плавно смещается, в результате получается линия, которая называется фазовой траекторией. Полным аналогом данной процедуры является построение обычной траектории движения точки по известным зависимостям её координат от времени. Вам необходимо описать динамику изменения сопротивлений терморезисторов в рассматриваемой схеме при различных начальных значениях сопротивлений r_{10} и r_{20}, которые задают начальную точку на фазовой диаграмме. Для качественного построения фазовой траектории не надо решать полученные вами дифференциальные уравнения! Надо уметь анализировать характер изменения сопротивлений. Необходимо отразить начальные положения (они заданы в условии) и проанализировать, к каким предельным значениям будет стремиться фазовая траектория.

Рассмотрим поведение системы при $p = 0{,}20$.

2.7. Найдите возможные стационарные (установившиеся) значения сопротивлений терморезисторов, нанесите их на фазовую диаграмму.

2.8. Для каждого из указанных начальных условий (они находятся на границе области и отмечены ромбами) постройте схематическую фазовую траекторию.

Пусть параметр увеличился до значения $p = 0{,}30$.

2.9. Постройте аналогичное семейство фазовых траекторий для $p = 0{,}30$.

▲ **Решение. Что происходит.** Терморезистор нагревается током и отдаёт тепло среде; от температуры зависит сопротивление, а от него — выделяемая мощность. Это обратная связь: у «положительного» резистора при постоянном токе нагрев усиливает нагрев, возможен тепловой разгон; у «отрицательного» при постоянном напряжении нагрев уменьшает сопротивление и тоже может усилить нагрев. Главная идея — за-

писать тепловой баланс за малое $\Delta\tau$ для безразмерного сопротивления $r = R/R_0$ в виде $a\,\Delta r/\Delta\tau = F(r)$: знак F показывает, куда движется r, корни $F = 0$ — стационарные режимы, а устойчивость определяет, меняет ли F знак с плюса на минус.

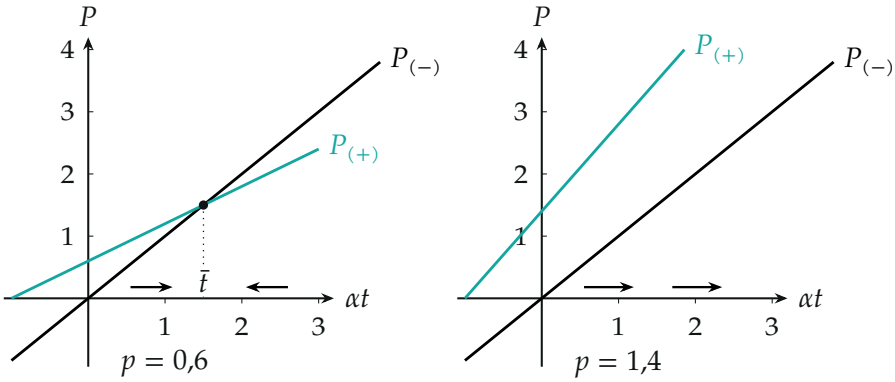
Обозначения. t — превышение температуры над окружающей средой; τ — время; $r = R/R_0$; $a = C/\beta$ (характерное время); устойчивый режим — такой, к которому система возвращается после малого отклонения.

Часть 1. Один «положительный» терморезистор.

1.1. Запишем закон сохранения энергии для резистора за малое время $\Delta\tau$: изменение его тепловой энергии равно выделенному теплу минус отданному среде:

$$C\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = I_0^2R_0(1+\alpha t) - \beta t = I_0^2R_0 - (\beta - \alpha I_0^2R_0)\,t.$$

Если $\beta > \alpha I_0^2R_0$, правая часть убывает с ростом t и обращается в нуль при $\bar{t} = \dfrac{I_0^2R_0}{\beta - \alpha I_0^2R_0}$: температура растёт, пока не достигнет $\bar{t}$, и дальше не меняется. Если $\beta \le \alpha I_0^2R_0$, правая часть не меньше $I_0^2R_0 > 0$ при любых t, температура растёт неограниченно и резистор перегорает.



Мощность тока $P_{(+)}$ и теплоотдача $P_{(-)}$ в единицах β/α как функции αt. Чёрные стрелки — направление изменения t: там, где $P_{(+)} > P_{(-)}$, резистор нагревается.

Условие стационарного режима: $\alpha I_0^2 R_0 < \beta$, то есть

$$I_0 < I_{0\max} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha R_0}}.$$

Обратите внимание: ровно при $I_0 = I_{0\max}$ ($p = 1$) графики параллельны и разогрев тоже идёт без остановки, поэтому $I_{0\max}$ — верхняя граница, которую ток не достигает.

1.2. Выразим температуру через сопротивление: $r = 1 + \alpha t$, $t = \dfrac{r-1}{\alpha}$, $\Delta t = \dfrac{\Delta r}{\alpha}$. Подставим в баланс 1.1 и умножим на α/β:

$$\frac{C}{\beta}\frac{\Delta r}{\Delta \tau} = \frac{\alpha I_0^2 R_0}{\beta} r - (r-1) \;\Rightarrow\; a\frac{\Delta r}{\Delta \tau} = p\,r - (r-1), \qquad a = \frac{C}{\beta}.$$

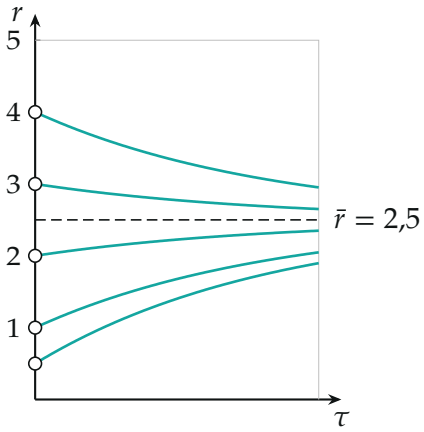
В наглядной форме:

$$a\frac{\Delta r}{\Delta \tau} = (p-1)\left(r - \frac{1}{1-p}\right) \quad (p \neq 1).$$

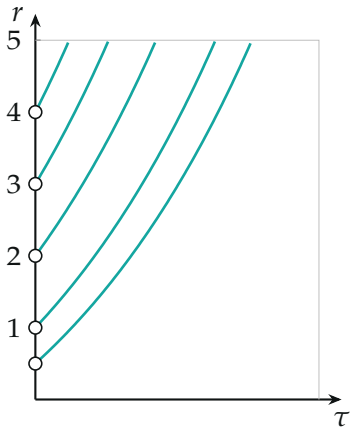
1.3. Правая часть линейна по r, поэтому движение определено знаком $(p-1)(r-\bar r)$.

При $p = 0{,}6 < 1$ стационарное значение $\bar r = \dfrac{1}{1-p} = 2{,}5$ и оно устойчиво: при $r < \bar r$ правая часть положительна, r растёт, при $r > \bar r$ убывает. Скорость пропорциональна расстоянию до $\bar r$, поэтому кривые монотонно (и тем медленнее) приближаются к 2,5 сверху и снизу: растущие — выпуклые вверх, убывающие — выпуклые вниз. Для контроля решение $r = \bar r + (r_0 - \bar r)e^{-(1-p)\tau/a}$.

При $p = 1{,}4 > 1$ стационарного значения нет ($\bar r = -2{,}5 < 0$ вне допустимых r): при любых $r > 0$ имеем $pr - (r-1) > 0$, и r растёт неограниченно, причём скорость растёт вместе с r — кривые выпуклы вниз, и чем больше r_0, тем быстрее рост: $r = -2{,}5 + (r_0 + 2{,}5)e^{0{,}4\tau/a}$.



$p = 0{,}6$



$p = 1{,}4$

Начальные значения $r_0 = 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$ (кружки); по горизонтали — время τ в единицах a.

Часть 2. Два «отрицательных» терморезистора.

2.1. При последовательном соединении ток один: $I = \dfrac{U_0}{R_1 + R_2}$. Баланс энергии для каждого резистора:

$$C\frac{\Delta t_1}{\Delta \tau} = \frac{U_0^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2} - \beta t_1,$$

$$C\frac{\Delta t_2}{\Delta \tau} = \frac{U_0^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2} - \beta t_2.$$

Для резистора с отрицательной характеристикой $r = 1 - \alpha t$, $t = \dfrac{1 - r}{\alpha}$, $\Delta t = -\dfrac{\Delta r}{\alpha}$. Подставим и умножим обе части на $-\alpha/\beta$:

$$\frac{C}{\beta}\frac{\Delta r_1}{\Delta \tau} = -\frac{\alpha U_0^2}{\beta R_0}\frac{r_1}{(r_1 + r_2)^2} + (1 - r_1).$$

Выделим параметр $p = \dfrac{\alpha U_0^2}{4\beta R_0}$ и получим систему

$$a\frac{\Delta r_1}{\Delta \tau} = -4p\frac{r_1}{(r_1+r_2)^2} + (1-r_1),$$

$$a\frac{\Delta r_2}{\Delta \tau} = -4p\frac{r_2}{(r_1+r_2)^2} + (1-r_2), \qquad a = \frac{C}{\beta}.$$

Первое слагаемое — нагрев током (уменьшает сопротивление), второе — теплоотдача (увеличивает).

2.2. Вычтем уравнения:

$$a\frac{\Delta(r_1-r_2)}{\Delta \tau} = -\left(\frac{4p}{(r_1+r_2)^2}+1\right)(r_1-r_2).$$

В установившемся режиме левая часть равна нулю, а скобка положительна при любых $r_1, r_2 > 0$, значит $r_1 = r_2$. Это даже сильнее: поскольку множитель при разности отрицателен всегда, разность сопротивлений в любом режиме убывает по модулю, и все фазовые траектории приближаются к диагонали $r_1 = r_2$.

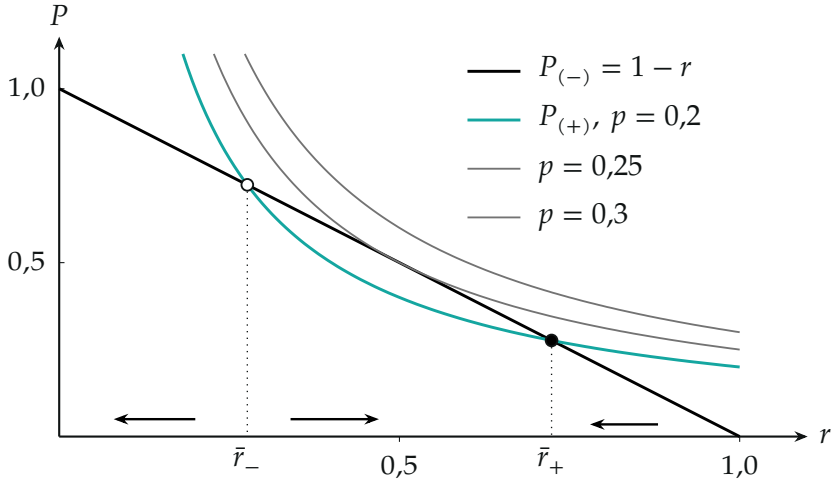
2.3. При $r_1 = r_2 = r$ обе строки системы совпадают:

$$a\frac{\Delta r}{\Delta \tau} = -\frac{p}{r} + (1-r) = P_{(-)} - P_{(+)}, \qquad P_{(+)} = \frac{p}{r},\ P_{(-)} = 1-r.$$

Здесь $P_{(+)}$ — мощность тока, $P_{(-)}$ — мощность теплоотдачи в удобных единицах. Установившийся режим — равенство $P_{(+)} = P_{(-)}$, то есть

$$r^2 - r + p = 0 \ \Rightarrow\ \bar{r}_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}.$$

Корни действительны при $1-4p \geq 0$. Геометрически: гипербола $P_{(+)} = p/r$ и прямая $P_{(-)} = 1-r$ пересекаются, если $p \leq \dfrac{1}{4}$; при $p = \dfrac{1}{4}$ они касаются.



Бирюзовая гипербола — $p = 0{,}2$, серые — $p = 0{,}25$ (касание) и $p = 0{,}3$ (нет пересечений). Стрелки — направление изменения r: при $P_{(+)} > P_{(-)}$ сопротивление падает.

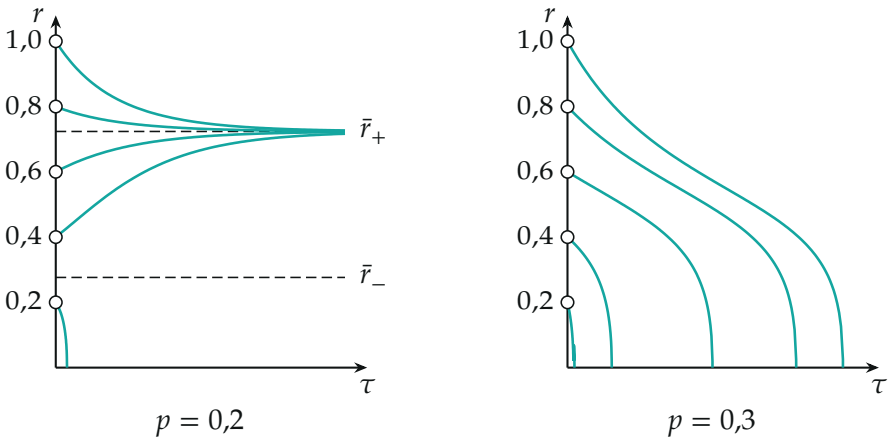
Устойчивость: пусть $F(r) = -\dfrac{p}{r} + 1 - r$. Тогда $F'(r) = \dfrac{p}{r^2} - 1$; с учётом $p = \bar{r}(1 - \bar{r})$ получаем $F'(\bar{r}) = \dfrac{1 - 2\bar{r}}{\bar{r}}$. Для $\bar{r}_+ > \dfrac{1}{2}$ производная отрицательна — режим устойчив, для $\bar{r}_- < \dfrac{1}{2}$ положительна — неустойчив. При $p > \dfrac{1}{4}$ имеем $F < 0$ при всех r: мощность тока всегда выше теплоотдачи. Установившийся режим возможен при

$$p \le \frac{1}{4},$$

причём при $p = \dfrac{1}{4}$ двойной корень $r = \dfrac{1}{2}$ притягивает только сверху. Для $p < \dfrac{1}{4}$ — устойчивый режим $\bar{r}_+$.

2.4. Знак F определяет направление. При $p = 0{,}2$: $\bar{r}_\pm = 0{,}72$ и $0{,}28$. Если $r_0 > \bar{r}_-$, то r монотонно приближается к $\bar{r}_+ = 0{,}72$ (сверху или снизу). Если $r_0 < \bar{r}_-$, то $F < 0$ и сопротивление падает до нуля: термосопротивления перегорают, причём около $r = 0$ скорость $\propto p/r$ возрастает

и кривая подходит к оси времени почти вертикально. При $p = 0{,}3 > \dfrac{1}{4}$ стационарных точек нет, при любом r_0 сопротивление падает до нуля (перегорание). Скорость падения минимальна при $r = \sqrt{p} \approx 0{,}55$, где $|F| = 2\sqrt{p} - 1 \approx 0{,}1$, поэтому там кривые идут полого, а у нуля — почти вертикально.



$p = 0{,}2$ $p = 0{,}3$

Начальные значения $r_0 = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0$ (кружки). Кривые получены численным интегрированием уравнения $a\,dr/d\tau = -p/r + 1 - r$; время в относительных единицах.

2.5. Установившийся режим существует, пока $p \le \dfrac{1}{4}$:

$$\frac{\alpha U_{0\max}^2}{4\beta R_0} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; U_{0\max} = \sqrt{\frac{\beta R_0}{\alpha}}.$$

Обратите внимание: при $U_0 < U_{0\max}$ перегорание всё равно возможно, если начальное сопротивление ниже $\bar{r}_-$ (резисторы уже сильно нагреты); при $U_0 > U_{0\max}$ перегорают при любых начальных условиях.

2.6. При $U_0 = \dfrac{U_{0\max}}{2}$ параметр $p = \dfrac{\alpha}{4\beta R_0} \cdot \dfrac{\beta R_0}{4\alpha} = \dfrac{1}{16}$. Устойчив больший корень:

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3/4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \approx 0{,}93.$$

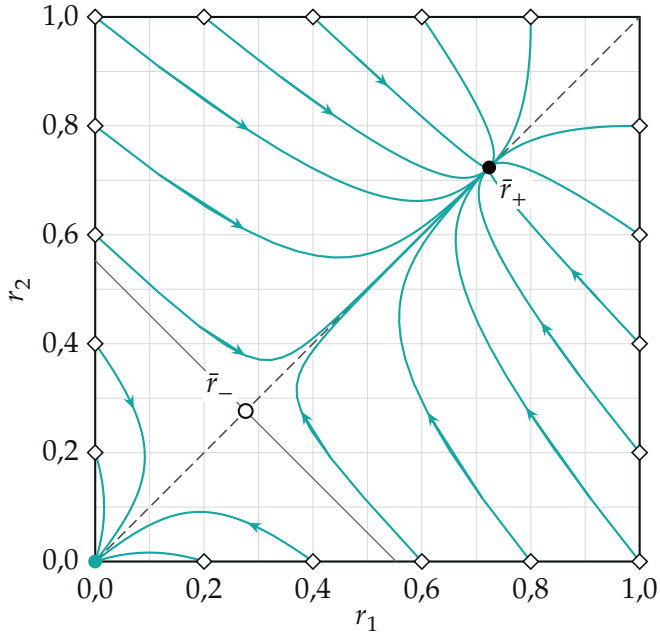
Второе напряжение в условии, $0{,}50\,U_{0\,\max}$, — то же значение, ответ тот же ($\bar{r}_- = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}07$ — неустойчивый корень).

2.7. Стационарные точки фазовой диаграммы лежат на диагонали $r_1 = r_2$ (п. 2.2): при $p = 0{,}20$ это $\bar{r}_\pm = (0{,}72;\,0{,}72)$ и $(0{,}28;\,0{,}28)$. Сложим уравнения системы: для суммы $S = r_1 + r_2$ получим

$$a\frac{\Delta S}{\Delta \tau} = -\frac{4p}{S} + 2 - S,$$

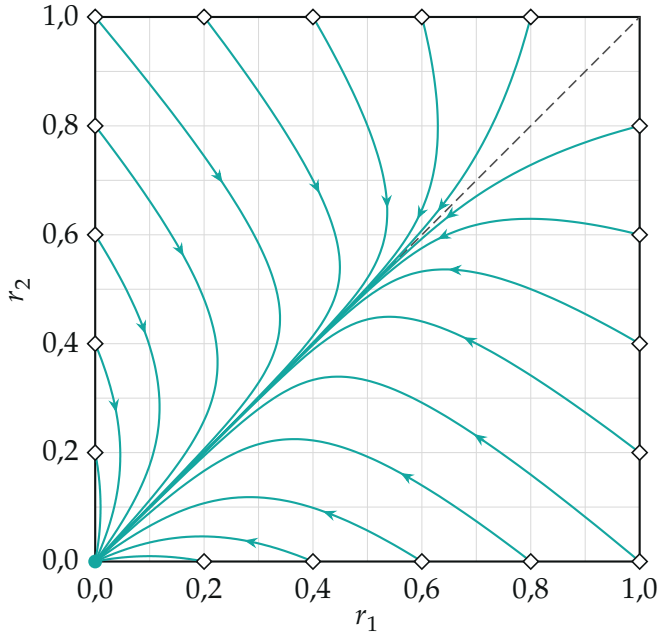
правая часть от разности не зависит. Её корни — $S_\pm = 1 \pm \sqrt{1-4p} = 0{,}55$ и $1{,}45$. На прямой $r_1 + r_2 = S_-$ сумма не меняется, и точки двигаются по ней к диагонали — к неустойчивой точке $(0{,}28;\,0{,}28)$. Эта прямая разделяет фазовую плоскость.

2.8. Всё поведение следует из двух фактов: разность $r_1 - r_2$ убывает (траектории стремятся к диагонали), а сумма растёт при $S_- < S < S_+$ и убывает вне этого промежутка. Начальные точки с $S > S_-$ (например, $(0;\,0{,}6)$, $(0{,}6;\,0)$ и все более далёкие от начала координат) идут к устойчивой точке $(0{,}72;\,0{,}72)$; начальные точки с $S < S_-$ (например, $(0;\,0{,}2)$, $(0{,}4;\,0)$) лежат ниже прямой $S = S_-$, их сумма убывает — они идут в нуль, то есть перегорание. Седло $(0{,}28;\,0{,}28)$ достигается только по самой прямой $S = S_-$.



Фазовая диаграмма при $p = 0{,}20$: ромбы — начальные условия, чёрная точка — устойчивая $\bar{r}_+$, белый кружок — неустойчивая $\bar{r}_-$, тонкая прямая — $r_1 + r_2 = S_-$, штриховая — диагональ. Бирюзовая точка в начале координат — перегорание.

2.9. При $p = 0{,}30 > \dfrac{1}{4}$ стационарных точек нет: при любом $S > 0$ правая часть уравнения для суммы $-\dfrac{4p}{S} + 2 - S < 0$, так как $S\,(2 - S) \le 1 < 4p$. Сумма падает до нуля, разность тоже убывает, поэтому все траектории заканчиваются в начале координат — перегорание; вблизи прямой $S = 1$ (где сумма меняется медленнее всего) траектории идут дольше.



Фазовая диаграмма при $p = 0{,}30$: все траектории (ромбы — начальные условия) приходят в начало координат.

Проверка. Размерность: β/α — мощность (Вт), $I_0^2 R_0$ и U_0^2/R_0 — тоже мощности, поэтому p в обеих частях безразмерно. Предел: $U_0 \to 0$, $p \to 0$: $\bar{r}_+ \to 1$, то есть тока нет, резистор не нагревается (при малых p $\bar{r}_+ \approx 1 - p$). Второй способ для 2.3: условие $p \le \frac{1}{4}$ даёт и дискриминант $1 - 4p \ge 0$, и неравенство $r(1-r) \le \frac{1}{4} < p$ (максимум $P_{(-)} \cdot r$ равен $\frac{1}{4}$ при $r = \frac{1}{2}$). Численное интегрирование системы при $p = 0{,}2$ сходится к $r_1 = r_2 = 0{,}7236$.

Ответ. 1.1) $I_{0\max} = \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha R_0}}$; 1.2) $a\dfrac{\Delta r}{\Delta \tau} = pr - (r-1)$, $a = \dfrac{C}{\beta}$; 1.3) $p = 0{,}6$: все $r(\tau)$ монотонно стремятся к $\bar{r} = 2{,}5$; $p = 1{,}4$: все $r(\tau)$ неограниченно растут; 2.1) $a\dfrac{\Delta r_{1,2}}{\Delta \tau} = -4p\dfrac{r_{1,2}}{(r_1 + r_2)^2} + (1 - r_{1,2})$, $a = \dfrac{C}{\beta}$; 2.2) $r_1 = r_2$; 2.3) $p \le \dfrac{1}{4}$; 2.4) $p = 0{,}2$: к 0,72 при $r_0 > 0{,}28$, иначе к

нулю; $p = 0{,}3$: к нулю; 2.5) $U_{0\,\max} = \sqrt{\dfrac{\beta R_0}{\alpha}}$; 2.6) $r = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}93$ (в обоих случаях); 2.7) $\bar{r}_{\pm} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}$: 0,72 (устойчивая) и 0,28 (неустойчивая); 2.9) устойчивых точек нет, траектории идут в начало координат.