Почему у человека два глаза?

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2025/26, 9 класс, задача 1] **Почему у человека два глаза?**

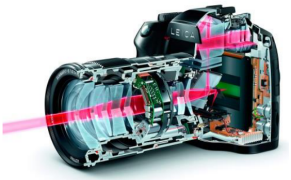
Традиционный ответ на поставленный вопрос — «Один запасной». К сожалению, он не совсем верный! Почему бы тогда не сделать два запасных?

Главная причина того, что природа снабдила нас двумя глазами, заключается в том, что два глаза дают возможность видеть не плоское изображение, а трёхмерное, объёмное! Так как изображения предметов, видимые разными глазами, различаются, то у мозга появляется возможность оценивать расстояние до различных наблюдаемых предметов.



Часть 1. Один глаз как фотоаппарат.

Человеческий глаз устроен сложнее, чем самый современный фотоаппарат. Однако глаз и фотоаппарат объединяет общая принципиальная оптическая схема. Имеется собирающая линза (объектив фотоаппарата и хрусталик глаза) и экран (светочувствительная матрица фотоаппарата и сетчатка глаза). Фотоаппарат позволяет получать чёткое изображение предметов, находящихся на разных расстояниях, благодаря изменению расстояния между линзой и экраном; глаз — благодаря изменению фокусного расстояния хрусталика.



Рассмотрим, как формируется изображение на экране в упрощённой схеме, если расстояние между экраном и линзой, а также фокусное расстояние линзы, остаются неизменными.

На рис. 1 и 2 в Листах ответов показан ход лучей от точечного источника S_0, проходящих через круглую линзу (с учётом её размеров) и формирующих чёткое изображение S_0' на экране. Там же показано положение другого точечного источника (S_1 на рис. 1, S_2 на рис. 2).

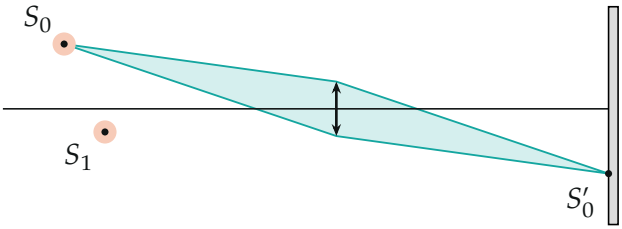


Рис. 1

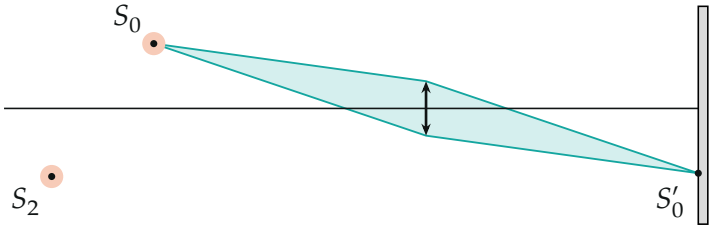


Рис. 2

1.1. Постройте (на этих же рисунках) ход лучей от источников S_1 на рис. 1 и S_2 на рис. 2 до экрана.

1.2. Укажите, какую форму имеют «изображения» этих точек на экране.

1.3. Укажите, можно ли по размеру «изображения» точечного источника на экране однозначно оценить расстояние до источника. Ответ обоснуйте.

Часть 2. Два глаза: как определяется расстояние?

Рассматриваемый в этой части эффект Вы можете наблюдать прямо сейчас. Расположите линейку горизонтально на расстоянии порядка 1 м.

Перед линейкой на некотором расстоянии вертикально расположите карандаш. Не сдвигая головы, посмотрите на линейку и карандаш сначала одним глазом, затем вторым. При этом положение карандаша относительно линейки смещается на заметное расстояние Δx. Смотри рис. 3 в Листах ответов.



Пусть расстояние между глазами равно $d = 7{,}0$ см, расстояние между глазами и линейкой равно $L = 100$ см, наблюдаемое смещение карандаша при рассмотрении его разными глазами равно $\Delta x = 3{,}0$ см.

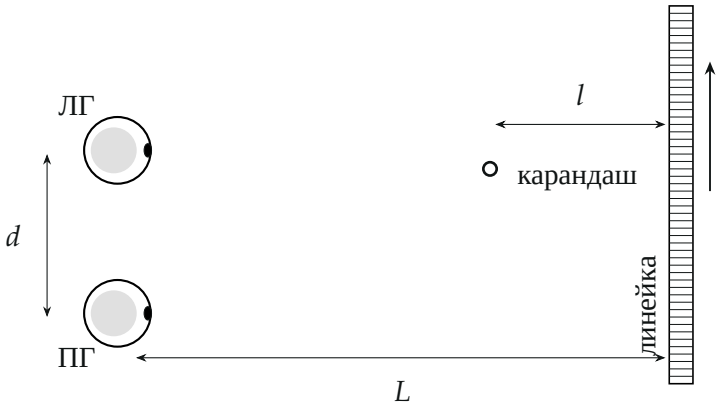


Рис. 3

2.1. Найдите, чему равно расстояние l между карандашом и линейкой.

Стереотруба — это военный оптический прибор (бинокль-перископ), состоящий из двух перископов, соединённых у окуляров и разведённых у объективов. Наблюдатель видит значительно усиленное стереоскопическое (объёмное) изображение, что позволяет вести наблюдение из-за укрытия, изучать местность и корректировать артиллерийский огонь.



Пусть максимальное расстояние, на котором человек способен воспринимать трёхмерное изображение, равно l_{max}. Расстояние между глазами человека равно d. Человек ведёт наблюдение с помощью стереотрубы, у которой расстояние между объективами труб равно D.

2.2. Определите, на каком максимальном расстоянии L_{max} человек способен воспринимать трёхмерное изображение с помощью этой стереотрубы.

Сделайте рисунок, поясняющий Ваше решение. Укажите, по каким характеристикам изображений в разных глазах человек способен оценивать расстояние. Укажите, как эти характеристики зависят от положения рассматриваемого предмета.

Часть 3. Луна глазами великана.

Приведённая фотография сделана более 50 лет назад. Она называется «Луна глазами великана». Это стереоскопическое изображение Луны, как видимое двумя глазами некоего сверхбольшого человека. Каждое изображение есть изображение в разных глазах этого великана.

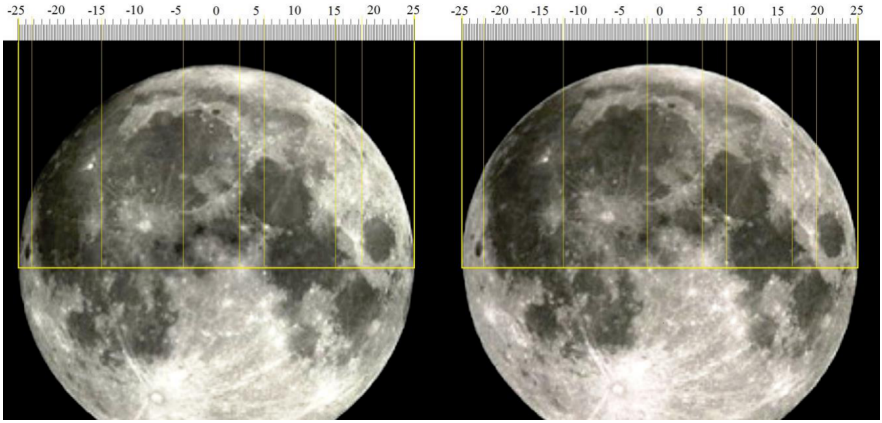


На самом деле, это фотографии Луны, сделанные с одной точки на поверхности Земли, но в разные моменты времени. Утверждается, что

Луна повёрнута к Земле всегда одной стороной. На самом же деле она слегка поворачивается, колеблется вокруг своей оси, поворачиваясь на малый угол. Но будем считать, что это действительно изображения Луны, видимые двумя глазами, находящимися на расстоянии d друг от друга.

3.1. Используя приведённые фотографии, рассчитайте расстояние d между «глазами великана».

Чтобы помочь Вам справиться с поставленной задачей, на рисунке 3 в Листах ответов эта фотография приведена в увеличенном масштабе. Над каждым изображением помещена шкала в некоторых условных единицах. Вертикальными линиями отмечены некоторые характерные детали (кратеры, границы морей), находящиеся вблизи лунного экватора. В таблице приведены координаты x_0, x_1 этих деталей (для каждого изображения), снятые с фотографии — они были сняты с экрана монитора с точностью до одного пикселя. Воспользуйтесь *всеми* этими данными для наиболее точного решения задачи.



x_0	x_1
−23,22	−22,22
−14,42	−12,30
−4,18	−1,60
2,98	5,38
6,02	8,40
15,00	16,76
18,40	19,88

Рекомендуем найти зависимость между приведёнными координатами, построить некоторый линеаризованный график, по которому можно определить искомое расстояние. Не удивляйтесь, если Ваш график не окажется идеальным — заметные погрешности связаны с тем, что трудно на фотографиях точно выбрать границы выбранных деталей.

Расстояние от Земли до Луны считайте равным $L = 3{,}0 \cdot 10^8$ м, что по странному совпадению равно одной световой секунде.

Вам может понадобиться приближённая формула, справедливая при малых изменениях угла $\delta\varphi$ (углы измеряются в радианах)

$$\sin(\varphi + \delta\varphi) = \sin\varphi + \delta\varphi \cdot \cos\varphi.$$

▲ **Решение. Что происходит.** Глаз и фотоаппарат работают одинаково: линза собирает лучи от каждой точки предмета в точку на экране, но только если точка лежит на «своём» расстоянии. Любая другая точка даёт на экране не точку, а светлый кружок — сечение конуса лучей. По размеру кружка расстояние определить нельзя: один и тот же кружок оставляют точки по обе стороны от «чёткого» положения. Второй глаз добавляет то, чего нет у одного: сдвиг картинки при смене точки наблюдения (параллакс). Этот сдвиг тем больше, чем ближе предмет, и расстояние по нему определяется однозначно. Задача про Луну — тот же параллакс, только «вторым глазом» служит поворот самой Луны.

Обозначения. f — фокусное расстояние линзы, A — её диаметр, s — расстояние от линзы до экрана; u — расстояние от источника до линзы, v — от линзы до его изображения; $D_\text{п}$ — диаметр пятна на экране.

Пункт 1.1. Ход лучей.

1. Положение фокуса. Источник S_0 и его изображение S_0' даны. Лучи от S_0 собираются в S_0', и среди них есть луч, который после линзы идёт параллельно главной оптической оси: он доходит до S_0' по горизонтали, то есть пересекает плоскость линзы на высоте S_0' (точка Q, лежащая на продолжении плоскости линзы). Но луч, вышедший из линзы параллельно оси, до неё проходил через передний фокус F. Значит, F — точка, где прямая S_0Q пересекает ось. На рис. 1 она оказывается ровно посередине между S_0 и линзой: S_0 стоит на двойном фокусном расстоянии, и экран — тоже, поэтому S_0' и S_0 симметричны.

2. Изображение S_1. Строим два «удобных» луча от S_1: параллельно оси (после линзы он идёт через задний фокус F') и через передний фокус F (после линзы идёт параллельно оси). Они пересекаются в точке S_1' — изображении S_1. Здесь она лежит *за* экраном, на расстоянии $v = \dfrac{uf}{u-f} \approx 2{,}4f$.

3. Лучи до экрана. Все лучи от S_1, прошедшие через линзу, направлены в S_1'. Крайние идут через края линзы. До экрана они не успевают сойтись, и на экран попадает отрезок между ними — он выделен на рисунке. Для S_2 всё то же, но S_2' лежит *перед* экраном: лучи сошлись, разошлись снова, и на экран попадает кружок от перекрещенных лучей.

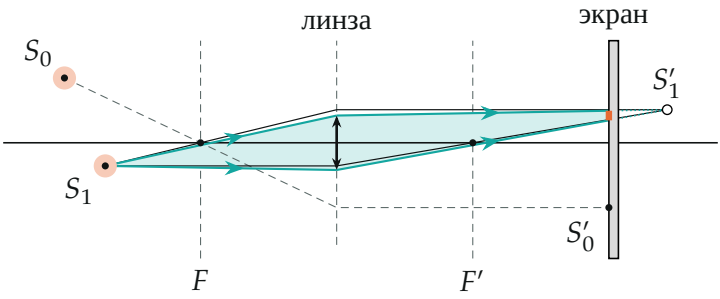


Рис. 1 с построением. Пунктир — нахождение F по S_0 и S_0'; тонкие чёрные лучи — построение S_1'; бирюзовые — лучи через края линзы; оранжевый отрезок на экране — сечение пучка

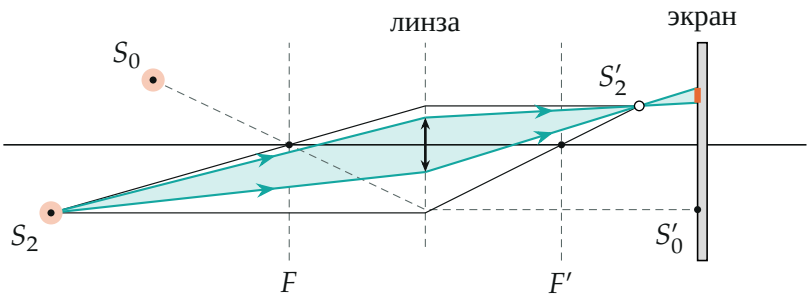


Рис. 2 с построением (обозначения те же)

Пункт 1.2. Форма «изображения». Пучок лучей от точки — конус, основание которого — круглая линза. Экран параллелен линзе, поэтому его сечение конуса подобно основанию и тоже круглое. Следовательно, и в первом, и во втором случае на экране — круглое пятно, размытая точка. Размер находим из подобия треугольников (вершина конуса — в изображении S' на расстоянии v от линзы):

$$D_\text{п} = A\,\frac{|v-s|}{v}.$$

В нашей схеме $s = 2f$, а по формуле тонкой линзы $v = \dfrac{uf}{u-f}$. Тогда $\dfrac{s}{v} = 2 - \dfrac{2f}{u}$ и

$$D_\text{п} = A\left|1 - \frac{2f}{u}\right|.$$

По чертежу $A = 0{,}4f$; для S_1 ($u = 1{,}7f$) получаем $D_\text{п} \approx 0{,}07f$, для S_2 ($u = 2{,}75f$) — $D_\text{п} \approx 0{,}11f$, а для S_0 ($u = 2f$) — нуль, то есть точка.

Пункт 1.3. Можно ли по размеру пятна найти расстояние. Нельзя. Построим график $D_\text{п}(u)$ (рис. 3): он имеет излом в точке $u = 2f$, где пятно исчезает, и каждое значение $D_\text{п} < A$ достигается при *двух* расстояниях — источник ближе $2f$ и источник дальше $2f$:

$$1 - \frac{2f}{u} = \pm\delta \;\Rightarrow\; u_{1,2} = \frac{2f}{1 \mp \delta},\qquad \delta = \frac{D_\text{п}}{A},\qquad \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} = \frac{1}{f}.$$

Например, при $\delta = 0{,}4$ это $u_1 \approx 1{,}4f$ и $u_2 \approx 3{,}3f$. Глаз по одному пятну не скажет, ближе источник или дальше «чёткого» положения. Кроме того, при $u \to \infty$ пятно стремится к A, и далёкие предметы неразличимы по расстоянию вовсе. К тому же $D_\text{п}$ зависит и от A с s, а мозгу они заранее неизвестны.

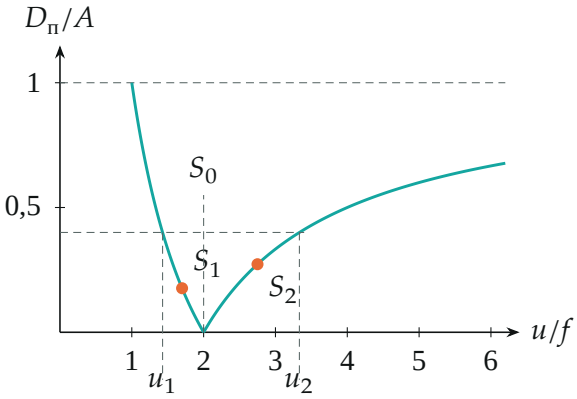
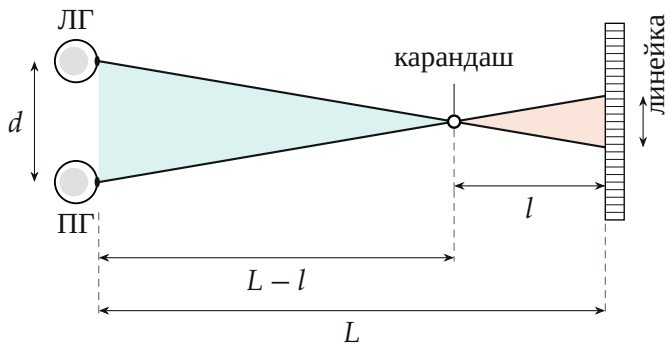


Рис. 3. Диаметр пятна D_n/A в зависимости от расстояния до источника: один уровень пересекает график дважды

Пункт 2.1. Расстояние до карандаша.

4. Что видит каждый глаз. Каждый глаз видит карандаш на линейке там, где луч зрения, проведённый от глаза через карандаш, упирается в линейку. Лучи двух глаз пересекаются в самом карандаше. Лучи, идущие дальше за карандаш, расходятся и попадают в линейку в точках, между которыми расстояние Δx.



Лучи зрения двух глаз пересекаются в карандаше; два подобных треугольника (бирюзовый и оранжевый) с общей вершиной в карандаше. Чертёж не в масштабе: на деле $d \ll L$

5. Подобные треугольники. Бирюзовый треугольник — основание d (между глазами), высота $L - l$ (от глаз до карандаша). Оранжевый — основание Δx (между точками на линейке), высота l. Углы при карандаше вертикальные, основания параллельны, значит, треугольники подобны:

$$\frac{\Delta x}{d} = \frac{l}{L - l} \;\Rightarrow\; \Delta x\,(L - l) = d\,l \;\Rightarrow\; l = L\,\frac{\Delta x}{d + \Delta x}.$$

Подставляем: $l = 100 \cdot \dfrac{3{,}0}{7{,}0 + 3{,}0}$ см $= 30$ см.

Проверка. Подставим $l = 30$ см обратно: $\Delta x = \dfrac{d\,l}{L - l} = \dfrac{7{,}0 \cdot 30}{70} = 3{,}0$ см — верно. Предельные случаи: при $\Delta x \to 0$ получаем $l \to 0$ (карандаш у линейки, сдвига нет), при $\Delta x \to \infty$ — $l \to L$ (карандаш у самых глаз).

Пункт 2.2. Стереотруба.

6. Что оценивает мозг. Лучи зрения левого и правого глаза, идущие к одной точке предмета, образуют угол α (угол схождения). По рис. 4 для малых углов $\alpha \approx d/l$, то есть тем больше, чем ближе предмет. Одновременно меняется картинка: предмет сдвигается относительно далёкого фона в изображениях двух глаз — именно этот сдвиг (как в пункте 2.1) измеряет мозг. Если угол схождения станет меньше некоторого порога $\alpha_{\min}$, сдвиг перестанет различаться, и предмет кажется плоским. По условию это происходит на расстоянии $l_{\max}$:

$$\alpha_{\min} = \frac{d}{l_{\max}}.$$

7. Стереотруба. Свет в оба глаза приходит через два объектива на расстоянии D друг от друга: для мозга всё выглядит так, как будто глаза

раздвинулись до D. Предельный угол остаётся тем же, но теперь $\alpha = \dfrac{D}{L}$:

$$\alpha_{\min} = \frac{D}{L_{\max}} = \frac{d}{l_{\max}} \;\Rightarrow\; L_{\max} = l_{\max}\,\frac{D}{d}.$$

Предел вырастает во столько раз, во сколько D больше d (увеличением перископов пренебрегаем).

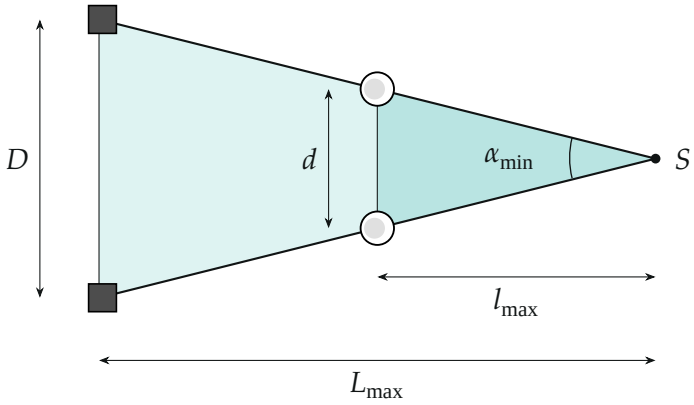


Рис. 4. Один и тот же предельный угол: для глаз (малый треугольник) и для объективов стереотрубы (большой). Углы для наглядности увеличены

Что по изображениям оценивает мозг. Расстояние оценивается по разности изображений в двух глазах: по смещению (параллаксу) предмета относительно фона, то есть по углу схождения лучей. Эта разность обратно пропорциональна расстоянию: $\alpha \approx d/l$ — у близкого предмета сдвиг большой, с удалением он убывает, а у далёких предметов практически исчезает (при $l > l_{\max}$ мозг его уже не различает). Размер пятна на сетчатке, как показано в пункте 1.3, расстояние однозначно не даёт.

Пункт 3.1. Луна глазами великана.

8. Поворот Луны вместо второго глаза. Пока Луна поворачивается на малый угол $\delta\varphi$, камера стоит на месте. Для снимка это равносильно тому, что Луна неподвижна, а точка съёмки сместилась на дугу того же угла вокруг Луны. Хорда между двумя «точками съёмки» — искомое расстояние между «глазами»: $d = L\,\delta\varphi$. Итак, надо найти угол поворота $\delta\varphi$.

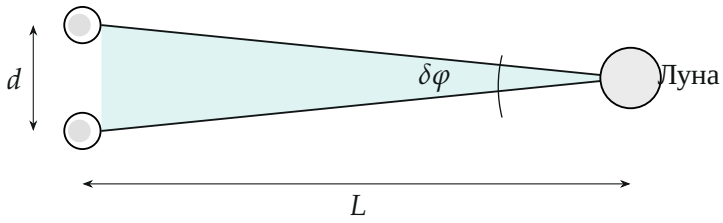


Рис. 5. Угол между направлениями на Луну из двух «глаз» равен углу $\delta\varphi$ её поворота. Чертёж не в масштабе

9. Координата детали. Положим Луну шаром радиуса R и выберем деталь на экваторе. Её положение определяет угол φ от направления на наблюдателя до радиуса, проведённого к детали. На снимке (вид вдоль линии наблюдения) её координата — проекция на ось x, перпендикулярную линии наблюдения:

$$x_0 = R\sin\varphi.$$

После поворота угол становится $\varphi + \delta\varphi$, и $x_1 = R\sin(\varphi + \delta\varphi)$. Так как $R \ll L$, все точки Луны от камеры почти на одном расстоянии, снимок — подобное уменьшение её видимого диска, и R, x_0, x_1 можно брать прямо в условных единицах шкалы: $R = 25$.

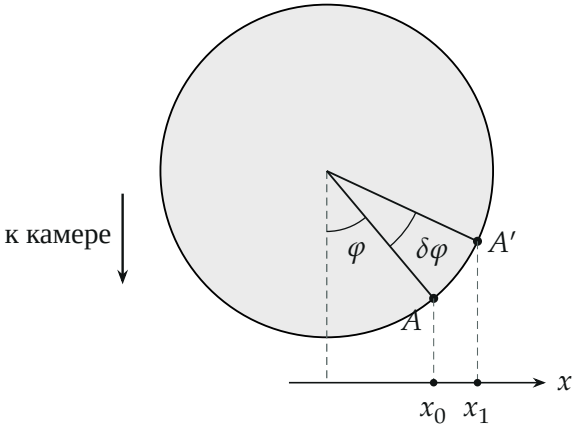


Рис. 6. Вид сверху на экватор Луны: деталь A переходит в положение A' при повороте на $\delta\varphi$ (угол показан увеличенным)

10. Линеаризация. Вычтем x_0 из x_1 и применим подсказку из условия:

$$\frac{x_1 - x_0}{R} = \sin(\varphi + \delta\varphi) - \sin\varphi = \delta\varphi\cos\varphi, \qquad \cos\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{R}\right)^2}.$$

Следовательно, график зависимости $y = \dfrac{x_1 - x_0}{R}$ от $\cos\varphi$ — прямая, проходящая через начало координат, а её наклон равен $\delta\varphi$. Считаем для каждой детали:

x_0	x_1	$\sin\varphi = x_0/R$	$\cos\varphi$	$y = (x_1 - x_0)/R$
−23,22	−22,22	−0,929	0,371	0,040
−14,42	−12,30	−0,577	0,817	0,085
−4,18	−1,60	−0,167	0,986	0,103
2,98	5,38	0,119	0,993	0,096
6,02	8,40	0,241	0,971	0,095
15,00	16,76	0,600	0,800	0,070
18,40	19,88	0,736	0,677	0,059

11. Наклон. Наносим точки $(\cos\varphi,\, y)$ и проводим прямую через начало координат по методу наименьших квадратов:

$$\delta\varphi = \frac{\sum y_i \cos\varphi_i}{\sum \cos^2\varphi_i} \approx 0{,}098 \text{ рад } (\approx 5{,}6^\circ),$$

разброс точек около прямой даёт погрешность $\approx 0{,}003$.

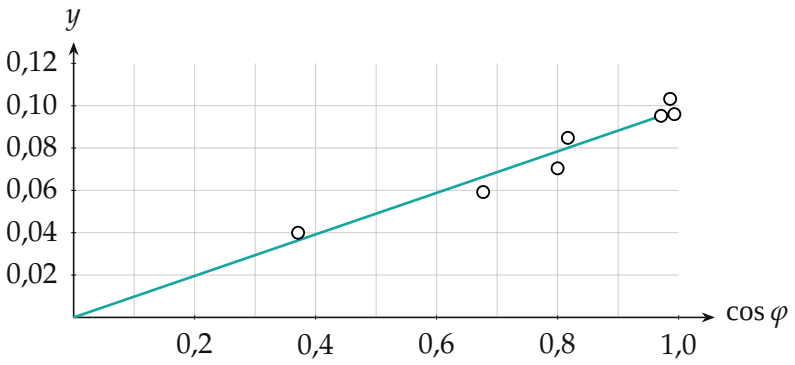


Рис. 7. Данные измерений и прямая $y = 0{,}098\cos\varphi$

12. Расстояние. Поворот на $\delta\varphi$ равносилен сдвигу точки съёмки на

$$d = L\,\delta\varphi = 3{,}0\cdot10^8\text{ м}\cdot0{,}098 \approx 2{,}9\cdot10^7\text{ м} \approx 3\cdot10^7\text{ м} = 30\,000\text{ км}.$$

Обратите внимание. Формула $\sin(\varphi+\delta\varphi) \approx \sin\varphi + \delta\varphi\cos\varphi$ приближённая; брать надо *все* детали и общую прямую, а не одну пару точек: каждая координата снята с точностью до пикселя.

Проверка. Размерность: $d = L\,\delta\varphi$ — метры, угол безразмерен. Второй способ: найдём угол для каждой детали точно, $\delta\varphi_i = \arcsin\dfrac{x_{1i}}{R} - \arcsin\dfrac{x_{0i}}{R}$; получаются значения 0,091–0,104 со средним 0,097, что совпадает с наклоном 0,098. Смысл: «великан» смотрит с базы 30 000 км — как человек с базой 7 см, смотрящий предмет на расстоянии 0,7 м (то же отношение базы к расстоянию 0,1), поэтому объём Луны хорошо виден.

Ответ. 1.1) построение выполнено на рис. 1 и 2 (фокус F — посередине между S_0 и линзой, лучи сходятся в S_1' за экраном и в S_2' перед экраном); 1.2) круглые размытые пятна; 1.3) нельзя: размер пятна $D_\text{п} = A\,|1-2f/u|$ одинаков для двух расстояний $u_{1,2} = 2f/(1\mp\delta)$; 2.1) $l = L\dfrac{\Delta x}{d+\Delta x} =$ 30 см; 2.2) $L_\text{max} = l_\text{max}\dfrac{D}{d}$; расстояние оценивается по смещению (параллаксу) изображения предмета в двух глазах $\alpha \approx d/l$, оно обратно пропорционально расстоянию; 3.1) $\delta\varphi \approx 0{,}098$ рад, $d = L\,\delta\varphi \approx 3\cdot10^7$ м.