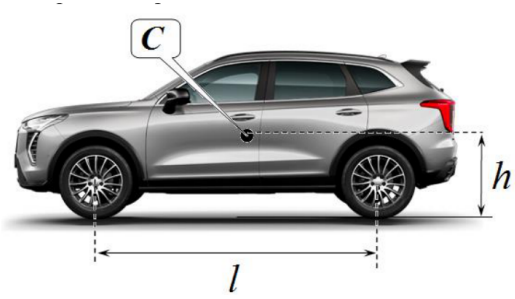
Жми на газ!

Задача 1. [Республиканская олимпиада (Беларусь) 2025/26, 9 класс, задача 3] **Жми на газ!**

В данном задании рассматриваются некоторые вопросы, связанные с движением автомобилей.

В качестве примера рассматривается автомобиль Belgee X50 (Белджи X50) — компактный городской кроссовер, построенный на модульной платформе BMA совместно с инженерами Volvo. С августа 2023 года кроссовер белорусской сборки производится под собственным брендом Belgee.



При решении задачи Вам могут понадобиться некоторые характеристики этого автомобиля:

- размеры автомобиля: длина — 4330 мм; ширина — 1800 мм; высота — 1609 мм;
- масса автомобиля (с водителем) $m = 1{,}7 \cdot 10^3$ кг;
- колёсная база (расстояние между осями колёс) $l = 2{,}6$ м;
- центр масс автомобиля находится на высоте $h = 0{,}80$ м над дорогой, на равном расстоянии от осей колёс;
- мощность двигателя $P = 150$ л. с. ≈ 110 кВт;
- коэффициент трения скольжения резины колёс о дорогу $\mu_0 = 0{,}80$.

Отметим, что коэффициенты трения существенно зависят от дорожного покрытия, износа колёс, погоды. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 9{,}8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Часть 1. Сопротивлением воздуха пренебрегаем!

Автомобиль начинает разгон из состояния покоя на горизонтальном участке дороги. Сопротивлением воздуха и трением качения пренебречь. В данном вопросе считайте, что все колёса автомобиля являются ведущими.

1.1. Рассчитайте минимальное время разгона автомобиля от состояния покоя до скорости $v_0 = 100\ \frac{\text{км}}{\text{час}}$.

Автомобиль начинает разгоняться на горизонтальном участке дороги.

1.2. Рассчитайте максимальное ускорение автомобиля, если: а) ведущими являются задние колёса; б) ведущими являются передние колёса.

Часть 2. Какова сила сопротивления на самом деле?

В справочниках приводят формулу силы лобового сопротивления воздуха, действующей на движущийся со скоростью v автомобиль

$$F = \frac{1}{2} C_x \rho v^2 S, \qquad (2)$$

где $\rho = 1{,}3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — плотность воздуха, S — площадь лобового поперечного сечения автомобиля, C_x — безразмерный коэффициент лобового сопротивления автомобиля, зависящий от формы его корпуса.

Для проверки применимости этой формулы были проведены тестовые испытания с автомобилем Белджи X50. Автомобиль разогнали, после чего выключили двигатель и, не включая тормозов, дали возможность ему свободно двигаться по горизонтальной дороге. При этом измеряли скорость автомобиля через каждые 100 метров пути. Результаты

измерений приведены в Таблице 1 Листов ответов:

x, м	v, м/с
0	30,00
100	27,33
200	24,57
300	21,67
400	18,56
500	15,08
600	10,85
700	3,92

2.1. Используя данные испытаний, покажите, что формула (2) правильно описывает силу сопротивления воздуха, действующую на автомобиль.

2.2. Рассчитайте численные значения коэффициента трения качения μ_1 и коэффициента лобового сопротивления C_x.

▲ **Решение. Что происходит.** Разгоняет автомобиль сила трения покрышек о дорогу, и у разгона два потолка. Первый — сцепление: сила трения не больше $\mu_0 N$. Второй — мощность двигателя: сила тяги $F = P/v$ падает с ростом скорости. Пока скорость мала, действует первый потолок, потом — второй. Если ведущая только одна ось, то при разгоне нагрузка перераспределяется между осями: сила трения приложена к дороге, ниже центра масс, и стремится приподнять перёд и придавить зад. В части 2 двигатель выключен, и автомобиль тормозят постоянное трение качения и сопротивление воздуха, растущее со скоростью.

Обозначения. $v_0 = 100$ км/ч $= 27{,}8$ м/с; N_1 — сила нормальной реакции на задние колёса, N_2 — на передние; C — центр масс; $k = \frac{1}{2} C_x \rho S$.

Пункт 1.1. Минимальное время разгона.

1. Предел по сцеплению. Все колёса ведущие, значит, на дорогу давит весь вес, и максимальная сила трения равна $\mu_0 mg$. По второму зако-

ну Ньютона для автомобиля в проекции на горизонталь

$$a_{\max} = \mu_0 g = 0{,}80 \cdot 9{,}8 = 7{,}84 \text{ м/с}^2.$$

Если бы мощности хватало всегда, время было бы $v_0/a_{\max} = 3{,}5$ с. Но проверим мощность.

2. Предел по мощности. Развиваемая мощность $P = Fv$. При ускорении $a_{\max}$ сила тяги $F = ma_{\max}$ постоянна, и мощность растёт с ростом v. Она достигает $P = 110$ кВт при

$$v_1 = \frac{P}{ma_{\max}} = \frac{110 \cdot 10^3}{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 7{,}84} \text{ м/с} \approx 8{,}25 \text{ м/с } (\approx 30 \text{ км/ч}).$$

До v_1 разгон идёт с постоянным ускорением $a_{\max}$ за время

$$t_1 = \frac{v_1}{a_{\max}} = \frac{P}{m(\mu_0 g)^2} \approx 1{,}05 \text{ с}.$$

Дальше сцепления с запасом, но мощность предельная: быстрее разгоняться нельзя, ускорение падает ($a = P/(mv)$, рис. 1).

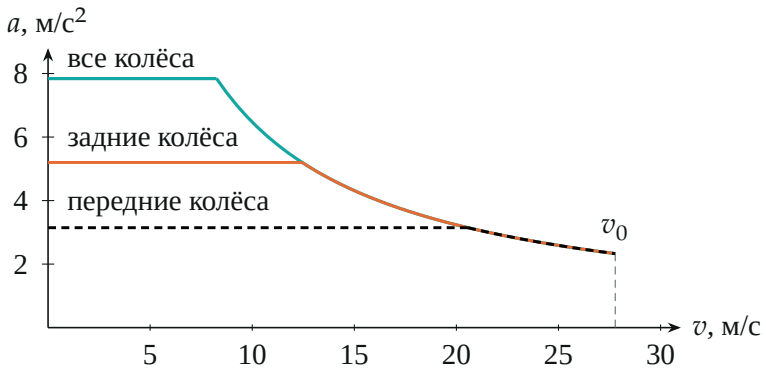


Рис. 1. Максимальное ускорение: полочка — предел по сцеплению, гипербола $a = P/(mv)$ — предел по мощности

3. Второй участок. При постоянной мощности работа двигателя идёт на приращение кинетической энергии: $Pt_2 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$ (потерь по

условию нет), откуда

$$t_2 = \frac{m}{2P}\,(v_0^2 - v_1^2) = \frac{1{,}7 \cdot 10^3}{2 \cdot 110 \cdot 10^3}\,(27{,}8^2 - 8{,}25^2)\ \text{с} \approx 5{,}44\ \text{с}.$$

4. Итог. $t = t_1 + t_2 \approx 6{,}5$ с.

Проверка. Размерность $P/(m\,a^2)$ — секунды. Мощностной участок должен быть дольше сцепления: $5{,}4 > 1{,}05$ — так и есть. Время больше «наивных» 3,5 с, поскольку мощность ограничивает разгон (при $P \to \infty$ получаем 3,5 с).

Пункт 1.2. Одна ведущая ось.

5. Силы. На автомобиль действуют (рис. 2): вес $m\vec{g}$ в центре масс C, реакции дороги $\vec{N}_1$ (задняя ось) и $\vec{N}_2$ (передняя ось) вертикально и горизонтальная сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ на ведущей оси. Ускорение автомобиля вызывает именно $F_{\text{тр}}$, при максимуме $F_{\text{тр}} = \mu_0 N$, где N — реакция на *ведущей* оси.

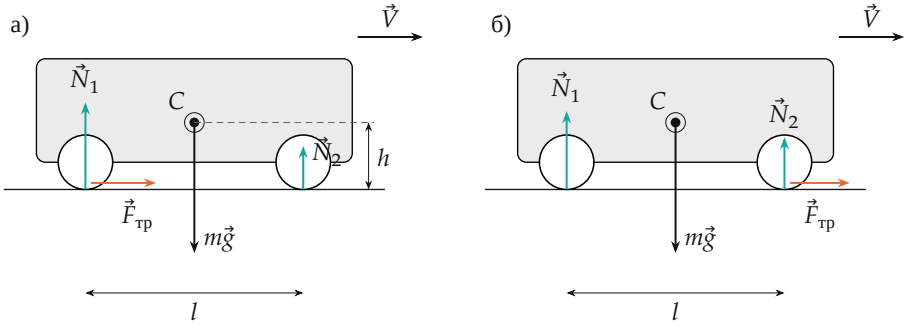


Рис. 2. Силы при разгоне: а) ведущие задние колёса, б) ведущие передние. Длины стрелок — по расчёту ниже

6. Уравнения. Автомобиль не отрывается от дороги и не вращается вокруг горизонтальной оси, поэтому по вертикали $N_1 + N_2 = mg$, а сумма моментов сил относительно оси через центр масс (чтобы не учитывать силы инерции) равна нулю. Сила трения лежит на дороге, на плече h ниже оси, реакции — на плечах $l/2$:

$$F_{\text{тр}}\,h + N_2\frac{l}{2} - N_1\frac{l}{2} = 0.$$

Сила трения при вращении против часовой стрелки поворачивает перёд вверх, значит, задняя ось нагружается сильнее — $N_1 > N_2$.

а) Ведущие — задние колёса. $F_{\text{тр}} = \mu_0 N_1$ и $N_2 = mg - N_1$:

$$\mu_0 N_1 h + (mg - N_1)\frac{l}{2} - N_1\frac{l}{2} = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{mg}{2\,(1 - \mu_0 h/l)}.$$

$$a_{\max 1} = \frac{\mu_0 N_1}{m} = \frac{\mu_0 g}{2\,(1 - \mu_0 h/l)} = \frac{7{,}84}{2\,(1 - 0{,}246)} \approx 5{,}2\ \text{м/с}^2.$$

б) Ведущие — передние колёса. $F_{\text{тр}} = \mu_0 N_2$, $N_1 = mg - N_2$:

$$\mu_0 N_2 h + N_2\frac{l}{2} - (mg - N_2)\frac{l}{2} = 0 \;\Rightarrow\; N_2 = \frac{mg}{2\,(1 + \mu_0 h/l)},$$

$$a_{\max 2} = \frac{\mu_0 g}{2\,(1 + \mu_0 h/l)} = \frac{7{,}84}{2\,(1 + 0{,}246)} \approx 3{,}1\ \text{м/с}^2.$$

Проверка. При $h \to 0$ нагрузка делится поровну, $a \to \mu_0 g/2 = 3{,}9$ м/с^2 для обеих схем; настоящие 5,2 и 3,1 лежат по разные стороны от этого значения. Заднеприводная машина разгоняется быстрее — известный факт. $N_2 = 0{,}34\,mg > 0$ у заднего привода: перёд не отрывается. Оба меньше $\mu_0 g = 7{,}84$ (все колёса ведущие). Эти ускорения держатся лишь пока хватает мощности (до 12 и 21 м/с, рис. 1).

Пункты 2.1–2.2. Накат.

7. Закон движения. Двигатель выключен, тормозов нет, на автомобиль в горизонтальном направлении действуют только трение качения $\mu_1 mg$ и сопротивление воздуха kv^2, оба против скорости. По второму закону Ньютона в проекции на ось движения, для модуля замедления a:

$$ma = \mu_1 mg + kv^2, \qquad k = \tfrac{1}{2} C_x \rho S.$$

Если формула (2) верна, то сила $F = ma$ линейно зависит от v^2: прямая с наклоном k и отрезком $b = \mu_1 mg$.

8. Замедление по данным. На участке между отметками x_{k-1} и x_k длиной $\Delta x = 100$ м считаем замедление постоянным. Из кинематики

$v_k^2 - v_{k-1}^2 = -2a_k\Delta x$:

$$a_k = \frac{v_{k-1}^2 - v_k^2}{2\Delta x}, \qquad \langle v\rangle_k = \frac{v_{k-1} + v_k}{2}, \qquad F_k = ma_k.$$

Результаты ($m = 1{,}7 \cdot 10^3$ кг):

x_k, м	$\langle v\rangle_k$, м/с	a_k, м/с^2	$\langle v\rangle_k^2$, м^2/с^2	F_k, Н
100	28,67	0,765	821,7	1301
200	25,95	0,716	673,4	1218
300	23,12	0,670	534,5	1140
400	20,12	0,626	404,6	1063
500	16,82	0,585	282,9	995
600	12,97	0,548	168,1	932
700	7,39	0,512	54,5	870

9. Проверка формулы (2). Строим два графика (рис. 3). Зависимость силы от $\langle v\rangle$ изогнута: наклон между соседними точками растёт от 11 до 31 Н·с/м, то есть F не пропорциональна v. Зависимость от $\langle v\rangle^2$ — прямая в пределах разброса (± 2 Н из $\sim$ 1000 Н, коэффициент $R^2 = 0{,}9999$, наклон между точками 0,55–0,59 кг/м почти постоянен). Значит, сила сопротивления воздуха пропорциональна v^2, формула (2) применима.

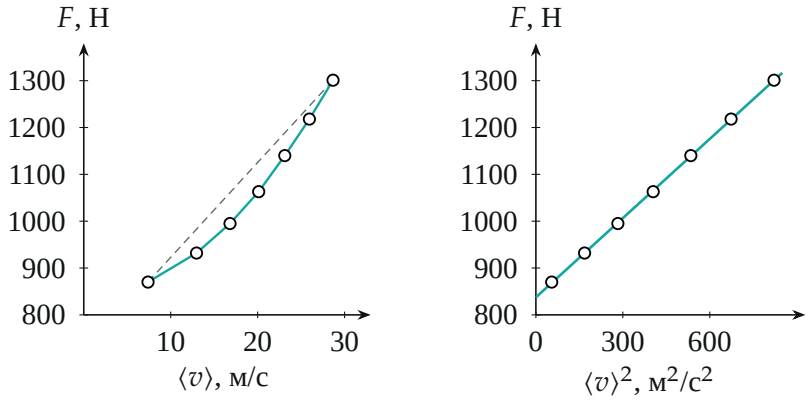


Рис. 3. Слева: $F(\langle v\rangle)$ — точки идут по кривой, пунктир — хорда. Справа: $F(\langle v\rangle^2)$ — прямая $F = 0{,}564\,\langle v\rangle^2 + 837$

10. Коэффициенты. Метод наименьших квадратов для прямой $F = k\langle v\rangle^2 + b$ даёт $k \approx 0{,}56$ кг/м и $b \approx 840$ Н. Отсюда

$$\mu_1 = \frac{b}{mg} = \frac{840}{1{,}7 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8} \approx 0{,}05, \qquad C_x = \frac{2k}{\rho S} = \frac{2 \cdot 0{,}56}{1{,}3 \cdot 2{,}9} \approx 0{,}30,$$

где площадь лобового сечения оценена по габаритам: $S \approx 1{,}8 \cdot 1{,}609$ м$^2 \approx 2{,}9$ м^2 (ширина на высоту; реальная площадь чуть меньше, поэтому C_x по порядку величины верен, а точное значение чуть выше).

Обратите внимание. (1) В части 1 мощность и сцепление — два разных ограничения, берётся более жёсткое в каждый момент. (2) Моменты берём относительно центра масс — тогда силы инерции в уравнении не нужны. (3) Замедление на участке считаем постоянным, а скорость берём среднюю — так погрешность метода мала (проверка точным интегрированием уравнения $v\,dv/dx = -(b + kv^2)/m$ даёт $k = 0{,}57$ кг/м, $b = 833$ Н, то есть $\mu_1 = 0{,}050$, $C_x = 0{,}30$).

Проверка. Размерность: $b = \mu_1 mg$ — ньютоны, $k = \frac{1}{2} C_x \rho S$ — кг/м. Сила воздуха при $v = 30$ м/с равна $0{,}56 \cdot 900 \approx 510$ Н, почти половина полного сопротивления 1340 Н, что согласуется с первым замедлением 0,79 м/с^2 по формуле и 0,765 по таблице (в середине участка).

Ответ. 1.1) $t = t_1 + t_2 \approx 6{,}5$ с (при $t_1 \approx 1{,}05$ с, $t_2 \approx 5{,}44$ с); 1.2а) $a_{\max 1} = \dfrac{\mu_0 g}{2(1 - \mu_0 h/l)} \approx 5{,}2$ м/с^2; 1.2б) $a_{\max 2} = \dfrac{\mu_0 g}{2(1 + \mu_0 h/l)} \approx 3{,}1$ м/с^2; 2.1) $F(\langle v\rangle^2)$ — прямая, $F_{\text{возд}} \propto v^2$; 2.2) $\mu_1 \approx 0{,}05$, $C_x \approx 0{,}30$ ($k \approx 0{,}56$ кг/м, $b \approx 840$ Н).